

[IV] n を自然数とする。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を

$$x_n = 2n^2 + 2n, \quad y_n = 2n + 1, \quad z_n = 2n^2 + 2n + 1$$

で定める。座標平面の原点を O とする。また、座標が (x_n, y_n) である点を P_n として、動径 OP_n が x 軸の正の向きとなす角を θ_n ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$) とする。このとき、以下の問いに答えよ。結果のみでなく、途中経過も書くこと。

(1) $x_n^2 + y_n^2 - z_n^2$ の値を求めよ。

(2) $\sin \theta_n$ を n で表せ。

(3) $\int \frac{1}{\cos t} dt$ を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\theta_n} \frac{z_n}{x_n \cos t + y_n \sin t} dt$$

とおくとき、 a_n を n で表し、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)$ を求めよ。