

[IV] θ は $0 \leq \theta < \pi$ を満たす定数, b は正の定数とする。

数列 $\{a_n(\theta)\}$ を,

$$a_1(\theta) = \sin \theta, \quad a_{n+1}(\theta) = \frac{a_n(\theta)}{b \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t \geq 0$ のとき $\sin t \leq t$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n について

$$a_n(\theta) = \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $b > 1$ のとき, すべての自然数 m について

$$\sum_{n=1}^m a_n(\theta) \leq \frac{b}{b-1} \theta$$

が成り立つことを示せ。

(4) $b = 1$ のとき, すべての自然数 m について

$$\sum_{n=1}^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n(\theta)}{2^{n-1}} d\theta \leq \frac{\pi^2}{4}$$

が成り立つことを示せ。