

東京大学大学院理学系研究科数学専攻修士論文
代用電荷法に関する一考察

桂田 祐史

1986年3月

記号表

字体に不満足なものがある、少し紛らわしい記号がある、標準的でない記号を用いることがあるなどの理由から、簡単にまとめておく。

\mathbf{N}	1 以上の整数全体
\mathbf{N}_0	0 以上の整数全体
\mathbf{Z}	整数全体
\mathbf{Z}^*	0 でない整数全体
\mathbf{R}	実数全体
\cup, \cap	それぞれ、集合の合併、共通部分を表わす
$A \setminus B$	集合 A と B の差 $\{x; x \in A \text{ and } x \notin B\}$
$\partial\Omega$	領域 Ω の境界
$\overline{\Omega}$	領域 Ω の閉包
$\Omega \Subset \Omega'$	Ω の閉包が compact かつ Ω' に含まれる
Δ	Laplacian
$\ \cdot\ _\infty$	考えている領域での sup ノルム
$\ \cdot\ $	行列の作用素ノルム
$(\cdot \cdot)$	\mathbf{R}^2 における内積
$\exists!$	一意的に存在することを表わす
$B(a; r)$	中心 a , 半径 r の開円板
$]a, b[$	半開区間 $\{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$ ($]a, b[$ 等の、同様の記号を用いる。)
\int	区間 $[0, 2\pi]$ における積分
δ_{jk}	Kronecker のデルタ
$\sigma(G)$	行列 G の固有値全体
$[r]$	r を越えない最大の整数 (Gauss の括弧)
\gg	左辺が右辺よりも、ずっと大きいことを表わす
\sup_θ	θ が $[0, 2\pi]$ を動くときの上限
$A \sim B \quad (N \rightarrow \infty)$	$N \rightarrow \infty$ のとき、 A と B の比が 1 に近づく
$\text{cond } G$	行列 G の条件数
\bar{z}	複素数 z の共役複素数
$:=$	右辺により左辺を定義することを表わす
\equiv	左辺と右辺が恒等的に等しい
$\equiv \pmod{N}$	合同式
$C(X)$	$X \subset \mathbf{R}^2$ における実数値連続関数の空間
C^∞	領域における無限回微分可能な関数の空間 $C(\overline{B(0; r_0)}) \cap C^\infty$ で、円板 $B(0; r_0)$ の内部で C^∞ -級で、境界まで込めて連続な関数の全体を意味している

尚、しばしば \mathbf{R}^2 と複素平面を同一視した記述をする。

論文要旨

代用電荷法 (charge simulation method) とは、Laplace 方程式の境界値問題等を数値的に解く方法の一種であり、主に電気工学の分野で 1970 年代初め頃から利用されている。これは領域の外部に、領域を囲むように電荷を配置し、それら電荷の作る電界の静電位を問題の近似解とする解法 (電荷量は、領域の境界から選んだ点で、与えられた境界条件を満たすように選ぶ。) で、素朴ではあるが使用する状況によっては非常に良い結果を与える解法である。しかし、これまで数学的に解析した例があまりないように見受けられる。この論文では、二次元円板等の、ごく特別な領域についてではあるが、代用電荷法による近似解が真の解に収束することを示し、幾つかの経験則の裏付けや数値計算上の問題点を考察する。

この論文の主結果のうち、収束に関する部分は次のようなものである。

$$\begin{aligned}\Omega &\stackrel{\text{def.}}{=} B(0; \rho) = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| \leq \rho\} \\ f &\in C(\partial\Omega) = \{g; g: \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ 連続}\}\end{aligned}$$

とするとき、Dirichlet 境界値問題

$$(L_f) \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = f \quad \text{on } \partial\Omega$$

の代用電荷法による近似解 $u^{(N)}$ を適当に定義したとき、次のことが成り立つ。

- (1) 十分大きい N について、代用電荷法による近似解 $u^{(N)}$ が一意的に存在する。
- (2) f を区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数とみたとき、その Fourier 級数が絶対収束するならば、代用電荷法による近似解 $u^{(N)}$ は、 $N \rightarrow \infty$ のとき、真の解に一様収束する。
- (3) $\alpha > 1$ なる実数 α に対して、 f の Fourier 係数 f_n が、

$$f_n = O(n^{-\alpha}) \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

を満たせば、

$$\|u - u^{(N)}\|_{\infty} = O(N^{-\alpha+1}) \quad N \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

- (4) (L_f) の真の解 u が、 $\Omega \supset \Omega'$ なる領域 Ω' まで、調和に拡張されるならば、誤差 $\|u - u^{(N)}\|_{\infty}$ は、 N につき指数減少する。

このうち、(4) が代用電荷法の優秀性の一端を垣間見せる性質で、これは経験則にも合致している。

実際に計算機で数値計算する場合には、上述の収束に関する定理だけでは説明しきれない事項があるが、上の問題 (L_f) に関しては、近似解を求める際に現われる連立一次方程式の係数行列の条件数を調べることによって、それらについても若干の考察が可能である。

目次

第 1 章	序 動機の説明	5
1.1	動機の説明	5
1.2	代用電荷法についての簡単な説明	5
1.3	この論文の構成	7
第 2 章	主定理の陳述	8
第 3 章	定理 2 - 1 の証明	12
3.1	係数行列の導入	12
3.2	係数行列 G の性質	13
3.3	近似解の書下し	18
3.4	誤差評価	19
第 4 章	弱い条件下での収束の考察	24
4.1	定理 2 - 1 の条件を緩めることについて	24
4.2	弱い境界条件の下での収束	24
4.3	定理 4 - 1 の証明	25
第 5 章	拘束点と極の位置関係	27
第 6 章	類似した領域における代用電荷法	29
6.1	円の外部領域	29
6.2	円環領域	30
第 7 章	Neumann 問題	32
7.1	近似解の公式	32
7.2	近似解の Fourier 級数展開	34
7.3	Neumann 問題の近似解の収束	35
第 8 章	数値計算 (1) 定理の数値実験による検証	38
8.1	実験の内容	38
8.2	調和多項式を境界条件に選んだ場合の結果と考察	38
8.3	対数ポテンシャルを境界条件に選んだ場合の結果と考察	39
第 9 章	数値計算 (2) 丸め誤差に関する考察	41
9.1	第八章の数値実験結果の考察 (続き)	41
9.2	今後の課題	42

9.3	係数行列の条件数	42
9.4	千鳥形配置に関する一つの考察	43
第 10 章	補足	46
10.1	定理 2-2 (dipole simulation) の証明の概要	46
10.2	定理 5-1 の証明の概要	48

第1章 序 動機の説明

— 代用電荷法の紹介と動機の説明 —

1.1 動機の説明

この論文で取り上げる代用電荷法とは、ある種の偏微分方程式の近似解法の一つであり、主に電気工学の分野で 1970 年代初め頃から利用されている。使用する状況によっては非常に良い結果を与える解法であるが、まだ数学的に解析した例があまりないように見受けられる。ここでは、特別な場合について代用電荷法による近似解が真の解に収束することを示し、幾つかの経験則の裏付けを試みる。

代用電荷法そのものが未だ広くは知られていないようだが、筆者自身は H.Okamoto より代用電荷法に関する電気工学分野での教科書 [1] 村島 と、論文 [2] M.Shōji の存在を知らされた。論文 [2] は今回の考察と直接に関わっている。そこでは、H.Okamoto と M.Shōji の両氏による円板を廻る完全渦なし流体の自由境界問題の数値シミュレーションにおいて、円環状の領域における Dirichlet 境界条件下の Laplace 方程式を離散化するために、以前は境界要素法を用いていた部分を代用電荷法に切り換えたところ、計算時間、精度とも改善され、それまで扱えなかった条件の場合のシミュレートも出来るようになったという成功例が報告され、興味深い分析が為されている。特に誤差が指数的に減少するという報告には大いに驚かされ、代用電荷法に対する興味を掻き立てられた。円板内の Laplace 方程式の Dirichlet 問題の場合には、この論文の第三章に示した方法で誤差評価ができることは H.Okamoto から教えていただいた。H.Okamoto と M.Shōji の両者に深く感謝の意を表したい。

1.2 代用電荷法についての簡単な説明

まず代用電荷法の考え方を簡単な例で解説しよう。

Ω を \mathbf{R}^m の有界領域として、 Ω における Laplace 方程式の Dirichlet 問題を考える。即ち、 f を境界 $\partial\Omega$ 上で与えられた関数として次の方程式を満たす関数 u を見出すことが目標である。

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= f && \text{on } \Omega\end{aligned}$$

物理的イメージとしては、静電位を求める問題であるが、代用電荷法では、 Ω の外部に点 y_k ($k = 1, \dots, N$) を取って各点に適当な電荷 Q_k を置き、それら電荷の作る電界の静電位をこの方程式の近似解とする。即ち、

$$X^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^N Q_k \Gamma(x, y_k); (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^n \right\}$$

から近似関数 $u^{(N)}$ を採る。ただし、 Γ は Δ の基本解 (単位電荷のつくる電界の静電位) であり、 $m = 2$ ならば、

$$\Gamma(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log |x - y|$$

である。

$\{Q_k\}_{k=1}^N$ の値については、境界 Ω 上に点 x_j ($j = 1, \dots, N$) を取り、各点 x_j で近似解 $u^{(N)}$ の値が真の解の値と等しくなるように：

$$u^{(N)}(x_j) = u(x_j) \quad (1 \leq j \leq N)$$

選ばれることが多い。

$$u^{(N)}(x) = (\Gamma(x, y_1) \cdots \Gamma(x, y_N)) \cdot {}^t(Q_1, \dots, Q_N)$$

であるから、上の条件は次のような連立一次方程式になる。

$$\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(x_1, y_1) & \cdots & \Gamma(x_1, y_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(x_N, y_1) & \cdots & \Gamma(x_N, y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

以上が代用電荷法の原理である。

注意 1.1 上の説明では Γ を基本解としたが、必ずしも基本解に限る訳ではない。実際、電気工学の分野では、円板電荷や円環電流の作る電界の静電位等、様々なものが用いられているし、この論文でも双極子の作る電界の静電位を用いた場合を考察する。一方で、方程式の解 (上の場合でいえば調和関数) ならば何でも良いという訳でもない。言い換えると単純な境界法ではない。電気工学者が経験から選び出した『電荷のような点状の源の作る静電位』が良好な結果を生むのである。

注意 1.2 $X^{(N)}$ から $u^{(N)}$ を選ぶ方法も選点法に限らない。理想をいえば、ミニ・マックス近似が望ましいだろうし、実際に最小二乗法を採用する人もいる。

ここで、代用電荷法の特徴を二、三、列挙しておこう。

まず、第一に境界要素法、その中でもポテンシャル論の離散化である『間接法』との類似が指摘できる。特に具体的な『基本解もどき』の線形結合の形で近似解を見出す点である。これまでの所、Laplace 方程式で大きな成功を収めてきた。これは電気工学の分野で活躍している、ということである。(Laplace 方程式以外に適用することも試みられているが、本格的な応用は今後の課題ということである。)

まだ、数学的な分析が為されていないので、経験則に頼るところが多い。(極、拘束点の配置の仕方等。) Laplace 方程式に限っても収束の証明はされていないと思う。

近似解そのものが半解析的 (式で表現されている、ということ) であるから、微分することが簡単に出来る。上の静電ポテンシャルの場合でいえば、電界を得るには近似解をただ微分するだけでよい。

Laplace 方程式の場合は、近似解そのものが調和となるから、誤差評価が簡単である。不適当な解き方をしても後から調べることにより、そのことが分るので安全である。

問題の条件が良い(境界値が滑らか、境界の凸凹が緩い等)場合には、少ない手間で高精度に計算できる。この論文でも特別の場合に示すことになるが、極、拘束点の個数 N に関して指数的に誤差が減少する。これは驚くべきことと言える。境界要素法と比べても少ない手間で済む(数値積分する必要がない点が大い)。

電荷 $\{Q_k\}$ を求める一次方程式の係数行列は密行列となる。元の方程式自体が対称であっても、行列に対称性は期待できない。また、行列は悪条件になり易い(条件数が大きいということ)。

以上、代用電荷法の特徴を簡単に述べたが、詳しくは参考文献を参照して頂きたい。[1] 村島は、電気工学において代用電荷法の取り扱いを述べた教科書である(巻末に参考文献の表がある。)

1.3 この論文の構成

第二章では、円板における Laplace 方程式の Dirichlet 問題の代用電荷法による近似解を定義して、境界値が解析関数である場合に、近似解が指数収束するという定理を述べる。ここでは、双極子を用いた近似解についても考察し、同様の結果が成立することも述べられる。

第三章では、解析関数の関数近似の誤差評価に用いられる手法を応用して前章の定理を証明する。

第四章では、近似解を Fourier 展開することによって、境界値に関する条件を弱めた場合の近似解の収束に関する定理を述べて証明を与える。

第五章では、第二章で扱ったのとは異なる電荷配置について考える。

第六章では、円板の代わりに円の外部領域や円環領域においても、円板の場合と同様の考察が出来ることを述べる。

第七章では、境界条件が Neumann の場合にも収束近似解が構成できることを示す。

第八章では、第二章、第五章の定理に即した数値実験の結果を示して、定理の誤差評価について考察する。

第九章では、連立一次方程式の係数行列の条件数を調べて、丸め誤差の影響について簡単に考察する。

第十章では、それまでの章で後回しにした定理の証明についての注意等を集めた。

第2章 主定理の陳述

— 円板内の Laplace 方程式の Dirichlet 問題 —

この章では、二次元平面の円板領域における代用電荷法の収束に関する定理を述べ、次の章で証明を与える。

定理 2 - 2 では、電荷の代わりに双極子を用いた近似解を扱う。これを考えたのは、私の指導教官である藤田宏先生から勧められたことによる。代用電荷法は、境界要素法や potential 論を想起させるところがあるが、これらの理論では、一重層ポテンシャル（電荷）と同様に二重層ポテンシャル（双極子）が現われる。特に、この章で扱う問題（L f）は、ポテンシャル論では、二重層ポテンシャルで解を求めるのが普通である。電気工学者も双極子を不連続境界条件の処理に用いたりするそうだが、ここでは数学的な興味から調べることにした。その結果、電荷の場合とほとんど変わらない結果が得られた。

$$0 < \rho < R, \quad R \neq 1$$

$$\Omega = B(0; \rho) = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < \rho\}$$

$f \in C(\partial\Omega)$ に対して、

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$N \in \mathbf{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} 2\pi/N \\ \omega &= \omega^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} e^{i\phi}, \quad i \text{ は虚数単位} \end{aligned}$$

(以下、 \mathbf{R}^2 と複素平面をしばしば同一視する。)

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \rho\omega^{k-1} \\ y_k &= y_k^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} R\omega^{k-1} \end{aligned}$$

$$X^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^N Q_k \cdot \Gamma(x, y_k); (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^N \right\}$$

where

$$\Gamma(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \log |x - y|$$

$$Y^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^N Q_k \cdot D(x, y_k); (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^N \right\}$$

where

$$\begin{aligned} D(x, y) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log |x - y| \\ &= \frac{(\nu_y, y - x)}{|y - x|^2}. \end{aligned}$$

(ただし、 ν_y は円板 $B(0; R)$ の境界上の点 y における、外向き単位法線で、この場合は $\nu_y = y/R$ と置く。)

定義 2.1 $v \in X^{(N)}$ で

$$v(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, \dots, N)$$

を満たすものが存在するとき、 v を方程式 (L_f) の、 $\{y_k\}_{k=1}^N$ を極、 $\{x_k\}_{k=1}^N$ を拘束点とする代用電荷法による近似解と呼ぶ。

(以下、 $\text{CSM}(\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N)$ による解と略記する。)

定義 2.2 $w \in Y^{(N)}$ で条件

$$w(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, \dots, N)$$

を満たすものが存在するとき、 w を方程式 (L_f) の、 $\{y_k\}_{k=1}^N$ を極、 $\{x_k\}_{k=1}^N$ を拘束点とする dipole simulation による近似解と呼ぶ。(以下、 $\text{DSM}(\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N)$ による解と略記する。)

注意 2.1 この章の初めに述べたように、定義 2 - 2 のように双極子を使って近似解を求める方法は実際に使われている訳ではないようである。従って、“dipole simulation” も、ここだけの言葉である。定義 2 - 1 の、“極”、“拘束点” は、電気工学者が実際に使っている言葉のようである (村島 [1] を参照。)

定理 2.1 (1) $(\forall R > 1) (0 < \forall \rho < R) (\forall N \in \mathbf{N}: R^N - \rho^N \neq 1) (\forall f \in C(\partial\Omega)) (\exists! u^{(N)} \in X^{(N)}) :$

$u^{(N)}$ は、 (L_f) の $\text{CSM}(\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N)$ による近似解

(2) (1) の条件下で、 (L_f) の解 u が、 $\rho < r_0$ なる r_0 に対して

$$\{w \in C(\overline{B(0; r_0)}) \cap C^\infty; \Delta w = 0\}$$

の元に拡張されるならば、 $u^{(N)}$ は十分大きい N に対して、以下の評価を満たす。

(a) $\rho r_0 / R^2 > 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{(N+1)/2} + \left\{ \frac{8}{N \log R} + \frac{16}{\frac{\rho r_0}{R^2} - 1} \right\} \right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^N$$

(b) $\rho r_0/R^2 = 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + \frac{8}{N \log R} + 8N \right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^N$$

(c) $\rho r_0/R^2 < 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\left\{ \frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + \frac{16}{1 - \frac{\rho r_0}{R^2}} \right\} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{N/2} + \frac{8}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

ここで、 $\|\cdot\|_\infty$ は、円板 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| \leq \rho\}$ における最大値ノルムで、

$$C(R, \rho) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left\{ 1, \frac{\log(R^N + \rho^N)}{|\log(R^N - \rho^N)|} \right\}$$

注意 2.2 (2) で、『十分大きい』とは、次の条件を満たす程大きいということである。

$$(\rho/R)^N \leq \frac{1}{2}, \quad R^N - \rho^N > 1 \quad N \log R \geq 4(\rho/R)^N$$

注意 2.3 定理の仮定で $R > 1$ とあるが、 $R \neq 1$ であることが本質的であり、 $0 < R < 1$ としても同様の結果が成立する。

$R = 1$ の場合は

$$(\forall v \in X^{(N)}) : v(0) = 0$$

となるので、任意の境界値に対して満足に行く近似解が得られないことは明らかであろう。

$0 < R < 1$ の場合には、上の定理に次の変更を加えた命題が成立する。

(ア) 上の評価式で、

$$\frac{8}{N \log R} \text{ の部分を } \frac{4}{|N \log R|} \text{ と書換える。}$$

(イ) $C(R, \rho)$ の定義を

$$C(R, \rho) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left\{ 1, \frac{|\log(R^N + \rho^N)|}{|\log(R^N - \rho^N)|} \right\}$$

とする。

『十分大きい N 』を『 $(\rho/R)^N \leq \frac{1}{2}$ を満たす N 』に換える。

定理 2.2

$(0 < \forall \rho < \forall R) (\forall N \in \mathbf{N}) (\forall f \in C(\partial\Omega)) (\exists! u^{(N)} \in Y^{(N)}) :$

$u^{(N)}$ は、 (L_f) の DSM($\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N$) による近似解

(L_f) の解 u が、 $\rho < r_0$ なる r_0 に対して

$$\{w \in C(B(0; r_0)) \cap C^\infty; \Delta w = 0\}$$

の元に拡張されるならば、 $u^{(N)}$ は任意の N に対して、以下の評価を満たす。

(1) $\rho r_0 / R^2 > 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{4}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{(N+1)/2} + \left\{2 + \frac{8}{\frac{r_0 \rho}{R^2} - 1}\right\} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

(2) $\rho r_0 / R^2 = 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{4}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + (4N + 2) \right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^N$$

(3) $\rho r_0 / R^2 < 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\left\{ \frac{4(\rho/r_0)^{1/2}}{1 - \rho/r_0} + \frac{8}{1 - \frac{r_0 \rho}{R^2}} \right\} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{N/2} + 2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

ここで、 $\|\cdot\|_\infty$ は、円板 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| \leq \rho\}$ における最大値。

第3章 定理 2 - 1 の証明

この章では、定理 2 - 1 を証明する。定理 2 - 2 については、証明が定理 2 - 1 のそれと殆ど同じなので、注意点を『第十章 補足』で述べるに留める。

この章は次の四つの節から構成されている。

§ 1 では、CSM ($\{y_k\}; \{x_k\}$) の要となる連立一次方程式を導入する。

§ 2 では係数行列の性質を調べ、後のための幾つかの用意をする。

§ 3 では、前二節の結果を元に近似解を具体的に書きおろす。

§ 4 では、Poisson 積分を用いて、真の解と近似解との誤差を調べて、定理の証明を完結させる。§ 4 の手法は解析関数の近似や数値積分の際の誤差解析において使われる手法を調和関数向きに応用したものである。

3.1 係数行列の導入

$$\phi_j = \phi_j^{(N)}(x)$$

を

$$\phi_j(x_k) = \delta_{jk} \quad (k = 1, \dots, N)$$

を満たす $X^{(N)}$ の元と定義する ($j = 1, \dots, N$)。ここで、 δ_{jk} は Kronecker のデルタである。

注意 3.1 $\phi_j^{(N)}$ は存在するとは限らないが、§ 3 - 2 で分るように、 $R^N - \rho^N \neq 1$ であれば一意的に存在する。

$\{\phi_j^{(N)}; j = 1, \dots, N\}$ が存在するとき、

$$u^{(N)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^N f(x_j) \phi_j^{(N)}(x)$$

と置くと

$$\begin{aligned} u^{(N)} &\in X^{(N)} \\ \Delta u^{(N)} &= 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup \{y_j\} \\ u^{(N)} &= f \quad \text{on } \bigcup \{x_j\} \end{aligned}$$

が成り立つ。即ち、 $u^{(N)}$ は (L_f) の CSM ($\{y_k\}; \{x_k\}$) による近似解である。

— $\phi_j^{(N)}$ の決定 —

$$\phi_j^{(N)} \in X^{(N)}$$

ゆえ、

$$\begin{aligned}\phi_j^{(N)}(x) &= \sum_{k=1}^N \alpha_{kj} \Gamma(x, y_k), \quad \alpha_{kj} \in \mathbf{R} \\ &= (\Gamma(x, y_1) \cdots \Gamma(x, y_N)) \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{Nj} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と書ける。すると、条件

$$\phi_j^{(N)}(x_k) = \delta_{jk} \quad (1 \leq j, k \leq N)$$

は

$$I = G \cdot A \quad \text{ここで、} I = \text{単位行列}, A = (\alpha_{ij}), G = (\Gamma(x_i, y_j))$$

と行列表現される。

3.2 係数行列 G の性質

$$L_k \stackrel{\text{def.}}{=} \log |\rho - R\omega^k|$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\Gamma(x_j, y_k) &= \log |\rho\omega^{j-1} - R\omega^{k-1}| \\ &= \log |\rho - R\omega^{k-j}| \\ &= L_{k-j}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$p \equiv q \pmod{N} \quad \text{ならば} \quad L_p = L_q$$

が成り立つことに注意する。

よって、

$$G = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & L_2 & \cdots & L_{N-1} \\ L_{N-1} & L_0 & L_1 & \cdots & L_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & L_3 & \cdots & L_0 \end{pmatrix}$$

となり、 G は巡回行列となる。

従って、

$$(\Gamma_1) \quad \sigma(G) = \{L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1}; p = 0, \dots, N-1\}$$

$$(\Gamma_2) \quad \det G = \prod_{p=0}^{N-1} (L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1})$$

(Γ_3) $\det G \neq 0$ であるならば、

$$G^{-1} \text{ の第 } (i, j) \text{ 成分} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(i-j)}}{L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1}}$$

が成り立つ。ここで、 $\sigma(G)$ は G の固有値全体を表すものとする。

注意 3.2 上の式には、虚数 ω が現われるが、式自体の値は実数である。

一方、

$$L_k = L_{N-k} \quad (k = 1, \dots, N-1)$$

となり、 G は対称であるから、

(Γ_4) $\sigma(G) \subset \mathbf{R}$

ここで、次の記号を導入する：

$$\varphi_p(z) = \varphi_p^{(N)}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \cdot \Gamma(z, R\omega^k)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} \varphi_p(\rho) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log |\rho - R\omega^k| \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} L_k \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \sigma(G) &= \{\varphi_p(\rho); p = 0, \dots, N-1\} \\ \det G &= \prod_{p=0}^{N-1} \varphi_p(\rho) \end{aligned}$$

のように表現できる。

後の準備として、この $\varphi_p^{(N)}$ の性質を調べる。

補題 3.2.1

$p \equiv q \pmod{N}$ ならば、 $\varphi_p^{(N)} = \varphi_q^{(N)}$

- (1) $\varphi_0^{(N)}(z) = \log |z^N - R^N|$
- (2) $(1 \leq \forall p \leq N-1)$

$$\varphi_p^{(N)}(z) = -\frac{N}{2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mN-p} (|z|/R)^{mN-p} e^{-i(mN-p)\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mN+p} (|z|/R)^{mN+p} e^{-i(mN+p)\theta} \right]$$

証明

(1)

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^{(N)}(z) &= \sum_{k=1}^N \log |z - R\omega^k| \\
 &= \log \left| \prod_{k=1}^N (z - R\omega^k) \right| \\
 &= \log |z^N - R^N|
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \varphi_p^{(N)}(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log |z - R\omega^k| \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \{ \log R + \log |1 - (z\omega^{-k}/R)| \} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log |1 - (z\omega^{-k}/R)| \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \operatorname{Re} [\log \{1 - (z\omega^{-k}/R)\}] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{m} (z\omega^{-k}/R)^m \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{2m} \left(\frac{|z|}{R} \right)^m \times \{ e^{im\theta} \omega^{-mk} + e^{-im\theta} \omega^{mk} \} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{2m} \left(\frac{|z|}{R} \right)^m \times \sum_{k=0}^{N-1} [e^{im\theta} \omega^{(p-m)k} + e^{-im\theta} \omega^{(p+m)k}]
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{qk} = \begin{cases} N & (\text{if } q \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

に注意すればよい。

補題の証明終了。

補題 3.2.2 ($\forall R \in \mathbf{R} : R > 0, R \neq 1$) ($\forall N \in \mathbf{N}$)

- (1) ($0 \leq \forall p \leq N - 1$) : $z \mapsto \varphi_p^{(N)}(z)$ は調和。
- (2) ($1 \leq \forall p \leq N - 1$) : $\varphi_p^{(N)}(z) = \varphi_{N-p}^{(N)}(z)$, $\varphi_0^{(N)}(z) = \varphi_0^{(N)}(z)$
- (3) ($0 \leq \forall p \leq N - 1$) ($\forall r \in [0, R[$) : $\varphi_p^{(N)}(r) \in \mathbf{R}$
- (4) ($1 \leq \forall p \leq N - 1$) : $\varphi_p^{(N)}(0) = 0$, $\varphi_0^{(N)}(0) = N \log R$

(5) $(0 \leq \forall p \leq N-1)$: 関数 $[0, R[\ni r \mapsto \varphi_p^{(N)}(r)$ は単調減少
特に $p \geq 1$ の時、 $\varphi_p^{(N)}(r) \leq 0$ (等号は $r = 0$)

(6) $(0 \leq \forall p \leq N-1)$: $\lim_{r \rightarrow R} \varphi_p^{(N)}(r) = -\infty$

(7) (a) $(1 \leq \forall p \leq N-1) (\forall r \geq 0)$:

$$\sup\{|\varphi_p^{(N)}(z)|; |z| = r\} = |\varphi_p^{(N)}(r)|$$

(b) $(\forall r \geq 0 : R^N - r^N \neq 1)$:

$$\sup\{|\varphi_0^{(N)}(z)|; |z| = r\} \leq C(R, r) \cdot |\varphi_0^{(N)}(r)|$$

where

$$C(R, r) = \max \left\{ 1, \frac{|\log(R^N + r^N)|}{|\log(R^N - r^N)|} \right\}$$

(8) $(0 \leq \forall p \leq N-1)$: $\varphi_p^{(N)}(\omega z) = \omega^p \varphi_p^{(N)}(z)$

(9) $\max\{\varphi_p^{(N)}(\rho); p = 1, \dots, N-1\} = \varphi_{[N/2]}^{(N)}(\rho)$

証明 (1) 明らか。

(2)

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^k)$$

であるが、

$$\Gamma(\bar{z}, \bar{w}) = \Gamma(z, w)$$

であることに注意して、

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(N)}(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(\bar{z}, R\omega^k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^{-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^{(N-k)}) \\ &= \sum_{k=1}^N \omega^{pk} \Gamma(z, R\omega^{(N-k)}) \\ &= \sum_{k'=0}^{N-1} \omega^{p(N-k')} \Gamma(z, R\omega^{k'}) \\ &= \sum_{k'=0}^{N-1} \omega^{(N-p)k'} \Gamma(z, R\omega^{k'}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(N-p)k} \Gamma(z, R\omega^k) \\ &= \varphi_{N-p}^{(N)}(z) \end{aligned}$$

(3), (4), (5), (6) は、補題 3-2-1 から明らか。

(7) も補題 3-2-1 より、

例えば $1 \leq p \leq N-1$ の場合は¹、

$$\begin{aligned} |\varphi_p^{(N)}(z)| &\leq \frac{N}{2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mN-p} (|z|/R)^{mN-p} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mN+p} (|z|/R)^{mN-p} \right] \\ &= \varphi_p^{(N)}(|z|) \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(N)}(\omega z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log |\omega z - R\omega^k| \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^p \omega^{p(k-1)} \log |\omega z - R\omega^{k-1}| \\ &= \omega^p \sum_{k=-1}^{N-2} \omega^{pk} \log |z - R\omega^k| \\ &= \omega^p \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \log |z - R\omega^k| \\ &= \omega^p \varphi_p^{(N)}(z) \end{aligned}$$

($k = -1$ は $k = N-1$ として良い。)

(9)

$$\varphi_p^{(N)}(\rho) = \varphi_{N-p}^{(N)}(\rho)$$

であるから、

$$k \stackrel{\text{def.}}{=} [N/2]$$

と置くと、

$$\varphi_1^{(N)}(\rho) < \cdots < \varphi_k^{(N)}(\rho)$$

が成立することを示せばよい。

$$\varphi_p^{(N)}(\rho) = -\frac{N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_{p,m} \cdot t^{(m-1)N}$$

where

$$\begin{aligned} A_{p,m} &= \frac{1}{mN-p} t^{N-p} + \frac{1}{(m-1)N+p} t^p \\ t &= \rho/R \end{aligned}$$

と書けるが、ここで ($\forall m \in \mathbb{N}$) ($1 \leq \forall p \leq N/2-1$)

$$A_{p,m} > A_{p+1,m}$$

が成り立つので主張は正しい。

補題の証明終了。

補題 3.2.3 G が正則であるための必要十分条件は、 $R^N - \rho^N \neq 1$ 。

¹右辺第二項の指数は $mN+p$ の間違いでは？

証明

$$\det G = \prod \varphi_p^{(N)}(\rho)$$

であるが、

$$\varphi_p^{(N)}(\rho) < 0 \quad (1 \leq \forall p \leq N-1, \forall \rho \in]0, R[)$$

ゆえ、

$$\varphi_0^{(N)}(\rho) = \log |R^N - \rho^N|$$

が 0 にならないことが、正則であるための必要十分条件になる。

証明終り。

3.3 近似解の書下し

以下、 $R^N - \rho^N \neq 1$ と仮定する。

§ 2 の結果から、この時、 $\{\phi_j^{(N)}; 1 \leq j \leq N\}$ が一意的に存在し、

$$\begin{aligned} \phi_j^{(N)}(x) &= \sum_{k=1}^N \alpha_{kj} \Gamma(x, y_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-j)}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \Gamma(x, y_k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{-pj}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{k=1}^N \omega^{pk} \Gamma(x, y_k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{-pj}}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \omega^p \varphi_p^{(N)}(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \omega^{p(1-j)} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \end{aligned}$$

となる。

ゆえに、§ 1 で述べたことから、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= \sum_{j=1}^N u(x_j) \phi_j^{(N)}(x) \\ &= \sum_{j=1}^N u(\rho \omega^{j-1}) \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \omega^{p(1-j)} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} u(\rho \omega^j) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \end{aligned}$$

これが近似解を与える公式である。

3.4 誤差評価

円板 $B(0; r_0)$ に関する Poisson 核

$$P(r, \theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta})$$

を用いると、

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int P(r, \theta - \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi \\ u(\rho \omega^j) &= \frac{1}{2\pi} \int P(r, j\phi - \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi \end{aligned}$$

と積分表示される (積分区間は $[0, 2\pi]$ である。以下同じ。)。

これから、

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int K^{(N)}(x; \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi$$

ここで、

$$K^{(N)}(x; \psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{j,p=0}^{N-1} P(\rho, j\phi - \psi) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}$$

よって、

$$e^{(N)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} u(x) - u^{(N)}(x)$$

と置くと、

$$e^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi^{(N)}(x; \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi$$

ここで、

$$\Psi^{(N)}(re^{i\theta}; \psi) = P(r, \theta - \psi) - K^{(N)}(re^{i\theta}; \psi)$$

補題 3.4.1 (近似核の級数展開)

$$K^{(N)}(x; \psi) = \frac{\varphi_0^{(N)}(x)}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \times \left[e^{-ik\psi} \frac{\varphi_k^{(N)}(x)}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} + e^{ik\psi} \frac{\varphi_k^{(N)}(\bar{x})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right]$$

証明 $K^{(N)}$ の定義式で、まず j に関する和を考える。

$p = 0$ の項

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} P(\rho, j\phi - \psi) \omega^{-pj} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n (e^{in(j\phi - \psi)} + e^{-in(j\phi - \psi)}) \right\} \\ &= N + N \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN} (e^{-ikN\psi} + e^{ikN\psi}) \end{aligned}$$

$1 \leq p \leq N-1$ の項

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} P(\rho, j\phi - \psi) \omega^{-pj} &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-pj} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n (e^{in(j\phi - \psi)} + e^{-in(j\phi - \psi)}) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n \sum_{j=0}^{N-1} (\omega^{(n-p)j} e^{-in\psi} + \omega^{-(n+p)j} e^{in\psi}) \\
&= N \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN+p} e^{-i(kN+p)\psi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN-p} e^{i(kN-p)\psi} \right]
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} P(\rho, j\phi - \psi) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \\
&= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN} (e^{-ikN\psi} + e^{ikN\psi}) \right\} \frac{\varphi_0^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \\
&+ \sum_{p=1}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN+p} e^{-i(kN+p)\psi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN-p} e^{i(kN-p)\psi} \right] \times \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \\
&= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN} (e^{-ikN\psi} + e^{ikN\psi}) \right\} \frac{\varphi_0^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{N-1} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN+p} \left[e^{-i(kN+p)\psi} \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} e^{i(kN+p)\psi} \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{-i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right] \times \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)}
\end{aligned}$$

(ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{kN-p} e^{i(kN-p)\psi} \frac{\varphi_p^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} &= \sum_{q=1}^{N-1} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{k'N+q} e^{i(k'N+q)\psi} \frac{\varphi_{N-q}^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_{N-q}^{(N)}(\rho)} \\
&= \sum_{q=1}^{N-1} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{k'N+q} e^{i(k'N+q)\psi} \frac{\varphi_q^{(N)}(re^{-i\theta})}{\varphi_q^{(N)}(\rho)}
\end{aligned}$$

という変形を行った。)

これから、主張が正しいことが分る。補題の証明終り。

従って、誤差を与える核は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Psi^{(N)}(re^{i\theta}; \psi) &= \left(1 - \frac{\varphi_0^{(N)}(re^{-i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-ik\psi} \left\{ \left(\frac{r}{r_0} \right)^k e^{ik\theta} - \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \frac{\varphi_k^{(N)}(re^{i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right\} + e^{ik\psi} \left\{ \left(\frac{r}{r_0} \right)^k e^{-ik\theta} - \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \frac{\varphi_k^{(N)}(re^{-i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right\} \right]
\end{aligned}$$

調和関数の絶対値を評価するので、境界上の値を考えればよい。そこで、

$$\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi) = \left(1 - \frac{\varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k e^{-ik\psi} \left\{ e^{ik\theta} - \frac{\varphi_k^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right\} + \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k e^{ik\psi} \left\{ e^{-ik\theta} - \frac{\varphi_k^{(N)}(\rho e^{-i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right\} \right]$$

ゆえに、

$$\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi) \leq \left| 1 - \frac{\varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho)} \right| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \left| e^{ik\theta} - \frac{\varphi_k^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho)} \right|$$

となる。これを評価することが目標となる。

$$g_p^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\theta} \left| e^{ip\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right|$$

と置くと、

$$|\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi)|$$

補題 3.4.2 (1) $\forall p \in \mathbf{N}_0$ に対して、

$$g_p^{(N)} \leq 1 + C(R, \rho)$$

(2-a) $R > 1$ の場合 .

$R^N - \rho^N > 1$, $(\rho/R)^N \leq \frac{1}{2}$, $N \log R \geq 4(\rho/R)^N$ ならば、

$$g_0^{(N)} \leq \frac{8}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N$$

(2-b) $0 < R < 1$ の場合 .

$(\rho/R)^N \leq \frac{1}{2}$ ならば、

$$g_0^{(N)} \leq \frac{4}{N |\log R|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N$$

(3) $(\rho/R)^N \leq \frac{1}{2}$ ならば、 $1 \leq \forall p \leq N-1$ に対して、

$$g_p \leq \frac{8p}{N-p} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2p}$$

この補題を認めて定理 2-1 を証明しよう。 Σ を $[N/2]$ で分けて、

$$\begin{aligned} |\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi)| &\leq g_0^{(N)} + 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k + 2 \sum_{j=[N/2]+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k g_k^{(N)} \\ &\leq \frac{8}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N + 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \frac{8k}{N-k} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-k} + 2 \sum_{k=[N/2]+1}^{\infty} (1 + C(R, \rho)) \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \\ &\leq \frac{8}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N + 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \sum_{k=1}^{[N/2]} \left(\frac{R^2}{\rho r_0} \right)^k + \frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{[N/2]+1} \end{aligned}$$

右辺第二項については、 $(R^2/\rho r_0)$ の値で場合分けして、

(1) $\rho r_0/R^2 > 1$ の場合

$$\begin{aligned} \text{右辺第二項} &\leq 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \left(\frac{R^2}{\rho r_0} \right) \frac{1}{1 - (R^2/\rho r_0)} \\ &= 16 \left(\frac{\rho}{R} \right)^N \frac{1}{\frac{\rho r_0}{R^2} - 1} \end{aligned}$$

(2) $\rho r_0/R^2 = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \text{右辺第二項} &\leq 16 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \times \left[\frac{N}{2}\right] \\ &\leq 8N \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \end{aligned}$$

(3) $\rho r_0/R^2 < 1$ の場合

$$\begin{aligned} \text{右辺第二項} &= 16 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \left(\frac{R^2}{\rho r_0}\right) \frac{(R^2/\rho r_0)^{[N/2]} - 1}{(R^2/\rho r_0) - 1} \\ &= 16 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \left(\frac{R^2}{\rho r_0}\right)^{N/2} \left(\frac{R^2}{\rho r_0}\right) \frac{1}{(R^2/\rho r_0) - 1} \\ &= 16 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N/2} \frac{1}{1 - \frac{\rho r_0}{R^2}} \end{aligned}$$

これから、定理 2-1 の成立することが分る。

補題 3-4-2 の証明前に次のことを注意しておこう。

$0 \leq \varepsilon \leq 1/2$ なるとき

$$0 \leq -\log(1 - \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m} \leq 2\varepsilon$$

補題 3-4-2 の証明 (1)

$$c_p \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\theta} \left| \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right|$$

と置くと、§ 3-2 の補題より、

$$\begin{aligned} c_0 &\leq C(R, \rho) \\ c_p &\leq 1 \quad (1 \leq \forall p \leq N-1) \end{aligned}$$

が成り立つことから。

(2-a)

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(N)}(\rho) &= \log(R^N - \rho^N) \\ &= N \log R - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN} \\ &\geq N \log R - 2(\rho/R)^N \\ &\geq (N \log R)/2 \quad (\text{仮定による}) \end{aligned}$$

一方、 $|z| \leq \rho$ なる任意の z に対して、

$$\begin{aligned} &|\varphi_0^{(N)}(\rho) - \varphi_0^{(N)}(z)| \\ &= |\log(R^N - \rho^N) - \log|R^N - z^N|| \\ &= |\log\{1 - (\rho/R)^N\} - \log|1 - (z/R)^N|| \\ &\leq |\log\{1 - (\rho/R)^N\}| + |\log|1 - (z/R)^N|| \\ &\leq 2(\rho/R)^N + 2(\rho/R)^N \\ &\leq 4(\rho/R)^N \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} g_0^{(N)} &\leq \frac{2}{N \log R} \times 4 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \\ &\leq \frac{8}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} |\varphi_p^{(N)}(\rho)| &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N}{2(mN-p)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN-p} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N}{2(mN+p)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN+p} \\ &\geq \frac{N}{2p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^p \end{aligned}$$

一方、 $|z| \leq \rho$ なる z に対して、

$$\begin{aligned} \left| \varphi_p^{(N)}(z) - \left\{ -\frac{N}{2p} \left(\frac{z}{R}\right)^p \right\} \right| &= \left| -\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{N}{2(mN-p)} \left(\frac{z}{R}\right)^{mN-p} + \frac{N}{2(mN+p)} \left(\frac{z}{R}\right)^{mN+p} \right] \right| \\ &\leq \frac{N}{2(N-p)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-p} \frac{1}{2} \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN-p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN+p} \right] \\ &\leq \frac{N}{2(N-p)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-p} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2N-p} + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+p} \\ &\leq \frac{N}{N-p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-p} \left[\frac{1}{2} + \frac{N-p}{N} \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^N + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2p} \right\} \right] \\ &\leq \frac{2N}{N-p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-p} \end{aligned}$$

そして、

$$e^{ip\theta} \varphi_p^{(N)}(\rho) - \varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})$$

を級数で表した時の主要項はキャンセルするので、

$$\begin{aligned} g_p^{(N)} &\leq \frac{4N}{N-p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-p} \frac{2p}{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-p} \\ &\leq \frac{8p}{N-p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-2p} \end{aligned}$$

補題の証明終了。

第4章 弱い条件下での収束の考察

4.1 定理 2 - 1 の条件を緩めることについて

電気工学分野での代用電荷法の用いられ方は標語的にいって『使えるとき（条件が整っている場合）には代用電荷法を使い』ということだそうである。つまり、Laplace 方程式の境界値問題について考えると、適用できる近似解法は数多いが、普通特に有効と考えられている境界要素法にも勝る場合がしばしばある、ということである。その意味では、単に代用電荷法による近似解の収束を示すだけでは不十分で、“条件が良い時には良い収束をする”ことを示すことが重要である。その意図に沿って定理 2 - 1 をこの論文の主定理に据えたが、これだけでは片手落ちで、緩い条件の下での収束についても考えるべきである。定理 2 - 1 では境界値に対して非常に強い条件を課したが、この章では Fourier 級数を考えることにより、境界値に関して条件を弱くして収束を考える。

注意 4.1 上の記述で“条件が良い”とは、工学者の経験から得られたものだが、簡単に言って、

- a) 境界の凸凹が緩い（あるいは、これも不正確な表現ではあるが“曲率が小”）。
- b) 境界値が滑らか。

ということである。第八章で用いる『行列の条件が良い』とは意味が異なることを注意する。

注意 4.2 この章の定理は適用できるが、定理 2 - 1 は適用できないような、境界値が“あまり滑らかではない”場合には、計算機で数値的に実際の問題を解く際に、境界要素法との比較において、代用電荷法の有効性が薄れるのではないかと想像する理由がある。一口に言って、丸め誤差の影響によるものだが、これについては第九章で少し考察したい。

4.2 弱い境界条件の下での収束

円板領域を扱うことや、拘束点、極の位置等、幾何学的な条件は第二章の定理 2 - 1 と同じとする。 $R^N - \rho^N \neq 1$ であれば、任意の連続な境界値 f に対して、C S M 近似解が一意的に存在するのは、定理 2 - 1 (1) に述べた通りである。

以下、 f_n で f の Fourier 係数を表わす：

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int e^{-in\theta} f(\rho e^{i\theta}) d\theta, \quad (n \in \mathbf{Z})$$

定理 4.1 (1) 境界値 f の Fourier 級数が絶対収束するならば、境界値問題 (L_f) の C S M 近似解 $u^{(N)}$ は、極、拘束点の個数 $N \rightarrow \infty$ のとき、真の解に収束する。

(2) さらに、ある $\alpha > 1$ に対して、境界値 f の Fourier 係数 f_n が、

$$f_n = O(n^{-\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば、

$$\sup_{|x| \leq \rho} |u(x) - u^{(N)}(x)| = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

4.3 定理 4 - 1 の証明

$$\theta \mapsto u(\rho e^{i\theta})$$

$$\theta \mapsto u^{(N)}(\rho e^{i\theta})$$

の Fourier 係数を調べる。まず、 u については、

$$u(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n e^{in\theta}$$

これから、

$$u(\rho \omega^j) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \omega^{nj}$$

次に、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(x) &= \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} u(\rho \omega^j) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \omega^{nj} \right) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-pj} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \omega^{nj} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left\{ \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \omega^{nj} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{-pj} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(N \sum_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \equiv p}} f_n \right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbf{Z} \\ n \equiv p}} f_n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\varphi_n^{(N)}(\rho)} \end{aligned}$$

(ここで、 $p \equiv q \pmod{N}$ ならば、 $\varphi_p^{(N)} = \varphi_q^{(N)}$ なることを用いた。)

これから、

$$u(\rho e^{i\theta}) - u^{(N)}(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \left(e^{in\theta} - \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho)} \right)$$

$u - u^{(N)}$ は調和関数であるから、

$$\sup_{|x| \leq \rho} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} |f_n| g_n^{(N)}$$

ここで、 $g_n^{(N)}$ は § 3 - 4 の記号であり、これについては補題 3 - 4 - 1 が成立するから、

$$\sup_{|x| \leq \rho} |u(x) - u^{(N)}(x)| \leq |f_0| g_0^{(N)} + \sum_{n=1}^{[N/3]-1} g_n^{(N)} (|f_n| + |f_{-n}|) + \sum_{n=[N/3]}^{\infty} g_n^{(N)} (|f_n| + |f_{-n}|)$$

となる。

$$\text{右辺第一項} \leq \frac{8|f_0|}{N|\log R|} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N = O\left(\frac{1}{N} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N\right)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺第二項} &\leq 2\|f\|_{\infty} \sum_{n=1}^{[N/3]-1} g_n^{(N)} \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \sum_{n=1}^{[N/3]-1} \frac{8n}{N-n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-2n} \\ &\leq \frac{8N}{3} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N/3} \|f\|_{\infty} = O\left(N \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N/3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{右辺第三項} \leq (1 + C(R, \rho)) \sum_{n=[N/3]}^{\infty} (|f_n| + |f_{-n}|)$$

これから、定理の真なることがわかる。

証明終り。

第5章 拘束点と極の位置関係

与えられた偏微分方程式の境界値問題を近似的に解くために代用電荷法を適用する際に、まず一番最初に問題となるのは拘束点と極（電荷）をどう配置するかということである。領域が円板であれば、定理 2 - 1 , 2 - 2 のように、拘束点の個数と極の個数を等しく、拘束点は等間隔に、極も領域の境界である円周と同心円上に等間隔に配置するのは、まず最初に思い付く自然な発想であろう。しかし、まだ考えるべき問題が残っている。それは、

- ρ .. 領域である円板の半径
- R .. 極（電荷）を置く円周の半径
- N .. 極の（従って拘束点の）個数

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} 2\pi/N \\ \omega &= \omega^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} e^{i\phi} \\ y_j &= y_j^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} R\omega^{j-1} \quad (j = 1, \dots, N) \quad \text{極} \\ x_j &= x_j^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \rho\delta\omega^{j-1} \quad (j = 1, \dots, N) \quad \text{拘束点} \\ \delta &= e^{i\kappa\phi}, \quad \kappa \in [0, \frac{1}{2}]\end{aligned}$$

としたときに、 κ をどう選ぶべきかということである。定理 2 - 1 , 2 - 2 では

$$(T) \quad \kappa = 0$$

と取った訳であるが、

$$(C) \quad \kappa = 1/2$$

と取るのも有望と考えられる。

この問題は星型領域の場合に一般化して考えることができるが、電気工学の分野では上の例で、(T) $\kappa = 0$ に相当する場合を対向形配置、(C) $\kappa = 1/2$ に相当する場合を千鳥形配置と呼んでいて、経験から次のような“答”が用意されている。

経験則 『対向形配置の方が常に精度が高く、この傾向はノイマン型の境界条件についても同じである』

そこで、二次元の円板領域の場合に、定理 2 - 1 , 2 - 2 と同様の計算をすることによって、この経験則が裏付けられるか、代用電荷法の場合で考えてみた結果得られたのが以下の定理である。この結果を見ると、得られた誤差評価は、対向形配置と千鳥形配置で殆ど差がない。これは、上に掲げた経験則と相反するが、これには次の二つの理由が考えられる。

- A . 誤差評価が粗いため、差が出なかった。
- B . 円板の場合は、対向形配置と千鳥形配置で差がない。

いずれが正しいか、この問題は後で数値実験の結果を見て、考えることにする。

定理 5.1 ($\forall R \neq 1$) ($0 < \forall \rho < R$)

(1-a) ($\forall N \in \mathbf{N}$: N は even) ($\exists f \in C(\partial\Omega)$) :

(L_f) の CSM($\{y_j^{(N)}\}$; $\{x_j^{(N)}\}$) 近似解は存在しない。

(1-b) ($\forall N \in \mathbf{N}$: N は odd, $2(1 - \frac{\rho}{R}) > (\frac{\rho}{R})^{(N+1)/2}$, $R^N + \rho^N \neq 1$) ($\forall f \in C(\partial\Omega)$) ($\exists! u^{(N)} \in X^{(N)}$) : $u^{(N)}$ は (L_f) の CSM($\{y_j^{(N)}\}$; $\{x_j^{(N)}\}$) 近似解

(2) (1-b) の条件に加えて $R > 1$ とする。 (L_f) の解 u が、 $\rho < r_0$ なる r_0 に対して

$$\{w \in C(\overline{B(0; r_0)}) \cap C^\infty; \Delta w = 0\}$$

の要素に拡張されるならば、 $u^{(N)}$ は十分大きい N に対して、以下の評価を満たす。

1. $\rho r_0 / R^2 > 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C'(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{(N+1)/2} + \left\{ \frac{4}{N \log R} + \frac{16}{(\frac{\rho r_0}{R^2} - 1)(1 - \frac{\rho}{R})} \right\} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

2. $\rho r_0 / R^2 = 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C'(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} + \frac{4}{N \log R} + \frac{8N}{1 - \rho/R} \right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^N$$

3. $\rho r_0 / R^2 < 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C'(R, \rho))}{1 - \rho/r_0} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + \frac{16}{(1 - \frac{\rho r_0}{R^2})(1 - \frac{\rho}{R})} + \frac{4}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

ここで、 $\|\cdot\|_\infty$ は、円板 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| \leq \rho\}$ における最大値ノルム。

$$C'(R, \rho) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left\{ \frac{2}{1 - \rho/R}, \frac{|\log(R^N - \rho^N)|}{|\log(R^N + \rho^N)|} \right\}$$

注意 5.1 (2) で、『十分大きい』とは、具体的にどれ位の条件であるかは、定理の証明の概略を述べた § 10 - 2 の補題の条件を参照して頂きたい。

注意 5.2 定理の (2) で $R > 1$ と仮定したが、 $0 < R < 1$ の場合には、上の評価式で、

$$\frac{4}{N \log R} \text{ の部分を } \frac{8}{N |\log R|}$$

と換えた命題が成り立つ。

第6章 類似した領域における代用電荷法

これまでの章では二次元の円板領域における代用電荷法を扱った。これが成功した理由は、近似解が具体的に計算できたことと、Poisson 積分や Fourier 級数を用いることが出来たからである。この章では、円の外部領域や円環領域でも同様の考察が出来ることを示す。

6.1 円の外部領域

$$\rho > 0$$

$$\Omega \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbf{R}^2; |x| > \rho\}$$

として、 Ω の境界上定義された与えられた関数 f に対し、Dirichlet 境界問題

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= f && \text{on } \partial\Omega \\ u &\text{は } \Omega \text{ で有界} \end{aligned}$$

を考える。今度は、 $0 < R < \rho$ なる R を取ることにし、 $\nu_y = -y/R$ とすること以外は円板領域の場合と同様にして、 $\text{CSM}(\{y_j\}; \{x_j\})$ や $\text{DSM}(\{y_j\}; \{x_j\})$ による近似解を考察すると、まず定理 2 - 1 に対応して次が成立することが分る。

定理 6.1 [(1)]

$$(\forall \rho \neq 1) (0 < \forall R < \rho) (\forall N \in \mathbf{N}: \rho^N - R^N \neq 1)$$

$$(\forall f \in C(\partial\Omega)) (\exists! u^{(N)} \in X^{(N)}) :$$

$u^{(N)}$ は、 (L'_f) の $\text{CSM}(\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N)$ による近似解

2. (1) の条件に加えて、 $\rho > 1$ とする。 (L'_f) の解 u が、 $\rho > r_0$ なる r_0 に対して

$$\{w \in C(\overline{\mathbf{R}^2 \setminus B(0; r_0)}) \cap C^\infty; \Delta w = 0\}$$

の元に拡張されるならば、 $u^{(N)}$ は十分大きい N に対して、以下の評価を満たす。

(a) $\rho r_0 / R^2 < 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{1 + C(R, \rho)}{1 - r_0/\rho} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{(N+1)/2} + \left\{ \frac{8}{N \log \rho} + \frac{16}{\frac{R^2}{\rho r_0} - 1} \right\} \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \right]$$

(b) $\rho r_0/R^2 = 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - r_0/\rho} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{1/2} + \frac{8}{N \log \rho} + 8N \right] \left(\frac{R}{\rho}\right)^N$$

(c) $\rho r_0/R^2 > 1$ のとき

$$\|u - u^{(N)}\|_\infty \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\left\{ \frac{2(1 + C(R, \rho))}{1 - r_0/\rho} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{1/2} + \frac{16}{\frac{\rho r_0}{R^2} - 1} \right\} \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{N/2} + \frac{8}{N \log \rho} \left(\frac{R}{\rho}\right)^N \right]$$

ここで、 $\|\cdot\|_\infty$ は、 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| \geq \rho\}$ における最大値ノルム。

$$C(R, \rho) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left\{ 1, \frac{\log(\rho^N + R^n)}{|\log(\rho^N - R^n)|} \right\}$$

注意 6.1 これまでと同様に、 $0 < \rho < 1$ の場合も対応した命題が成り立つ。

ところで、定理 2 - 2 に対応して、dipole simulation を考えると、DSM 近似解の存在は示すことが出来るが、対応する評価式を無条件に得ることは出来ない。境界値 f に対して、

$$\int f(\rho e^{i\psi}) d\psi = 0$$

なる条件を課す必要がある。即ち、真の解が無限遠で 0 になるような場合のみ近似解は真の解に収束することが証明できる。これは、一点 y に置かれた dipole の作る電位 $D(x, y)$ が $|x| \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するということから納得される。この辺の事情は二重層ポテンシャルを用いて Laplacian の外部 Dirichlet 問題を解く場合と同じである。Dirichlet 問題を potential 論で扱うときは、通常、一重層ポテンシャルは用いないが、代用電荷法においては dipole に比較して charge を用いる場合が意外な利点を持っていることを示して興味深い。

6.2 円環領域

そもそも、私がこの問題を考える端緒となった Okamoto-Shōji の自由境界問題の数値シミュレーションでは、円環状の領域で代用電荷法を適用している。[2] M.Shōji の中にも円環領域の場合の簡単な考察がある (そこでは、以下の記号で $f \equiv 0, g \equiv 1$ の場合を扱っている)。そこで、この場合にも収束の証明を試みた。

$$R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$$

として

$$\Omega = \Omega(\rho_1, \rho_2) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbf{R}^2; \rho_1 < |x| < \rho_2\}$$

における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= f && \text{on } |x| = \rho_1 \\ u &= g && \text{on } |x| = \rho_2 \end{aligned}$$

を考える。

イ) $f = 0$ の場合。

Okamoto-Shōji にならって、

$$\begin{aligned}x_j &= \rho_2 \omega^{j-1} \\ y_j &= R_2 \omega^{j-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_o(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\rho_1 |x - y|}{|y| |x - y^*|} \\ &\quad \text{where } y^* \stackrel{\text{def.}}{=} (\rho_1^2 / |y|^2) y \\ X_o^{(N)} &\stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^N Q_j \Gamma_o(x, y_j); (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^N \right\}\end{aligned}$$

なる近似関数の空間を採用する。即ち、領域 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| = \rho_1\}$ における Green 関数を用いる。(これは、鏡像の位置に電荷を置くということであり、やはり代用電荷法である。)

この場合、 $\forall v \in X_o^{(N)}$ は無条件で

$$v = 0 \quad \text{on } |x| = \rho_1$$

を満たすので、拘束点は円周 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| = \rho_2\}$ からのみ選んでいるのである。誤差評価も円周 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| = \rho_2\}$ 上で実行すればよいことになり、計算は定理 2 - 1 とほとんど同様に遂行される。

ロ) $g = 0$ の場合。

$$\begin{aligned}x_j &= \rho_1 \omega^{j-1} \\ y_j &= R_1 \omega^{j-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_I(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{\rho_2 |x - y|}{|y| |x - y^*|} \\ &\quad \text{where } y^* \stackrel{\text{def.}}{=} (\rho_2^2 / |y|^2) y \\ X_I^{(N)} &\stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^N Q_j \Gamma(x, y_j); (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^N \right\}\end{aligned}$$

とする。これも、全く同様である。

従って、 f, g が一般の場合の問題も、二つの問題 (イ, ロのタイプのもの) に分解して、それぞれを解いてから近似解を重ねることによって、収束近似解を構成できることが分る。しかし、 f, g が一般の場合には問題を分解せずに解ければ、その方が自然であろう。残念ながら、その場合はまだ解けていない。

第7章 Neumann問題

この章では Neumann 境界条件の場合も Dirichlet 境界条件の場合と同様の考察ができることを円板の場合に示す。

7.1 近似解の公式

$$0 < \rho < R$$

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < \rho\}$$

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f && \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

$N \in \mathbf{N}$ に対して、 $\phi = \phi^{(N)}$, $\omega = \omega^{(N)}$, $x_k = x_k^{(N)}$, $y_k = y_k^{(N)}$, $X^{(N)}$ 等の定義は第二章と同じにする。

定義 7.1 $v \in X^{(N)}$ で

$$v(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, \dots, N)$$

を満たすものが存在するとき、 v を方程式 (N_f) の、 $\{y_k\}_{k=1}^N$ を極、 $\{x_k\}_{k=1}^N$ を拘束点とする代用電荷法による近似解と呼ぶ。(以下、CSM ($\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N$) による解と略記する。)

定理 7.1 $(0 < \forall \rho < \forall R) (\forall N \in \mathbf{N}) (\forall f \in C(\partial\Omega)) (\exists! u^{(N)} \in X^{(N)}) :$

$u^{(N)}$ は、 (N_f) の CSM ($\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N$) による近似解

$v \in X^{(N)}$ とすると、

$$v(x) = \sum_{k=1}^N Q_k \Gamma(x, y_k), \quad (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbf{R}^N$$

と書けるが、このとき定義 7 - 1 の条件は

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x_1, y_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x_1, y_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x_N, y_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x_N, y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

なる連立一次方程式となる。係数行列を G と置こう。

ここで、法線方向の微分は、 Γ の第一変数についてのものである。

$$\begin{aligned} L_k &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x, R\omega^k) \Big|_{x=\rho} \\ &= \frac{(x - R\omega^k | \nu_x)}{|x - R\omega^k|^2} \Big|_{x=\rho} \end{aligned}$$

と置くと、 G の第 (j, k) 成分は L_{k-j} となり、やはり G は巡回行列となる。

そこで、

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(N)}(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \Gamma(x, R\omega^k) \quad (\text{これは、定理 2 - 1 と同じ。}) \\ \Phi_p^{(N)}(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x, R\omega^k), \quad (x \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

と置くと、次のことが成り立つ。

$$(\Gamma_1) \quad \sigma(G) = \{\Phi_p^{(N)}(\rho); p = 0, 1, \dots, N-1\}$$

$$(\Gamma_2) \quad \det G = \prod \Phi_p^{(N)}(\rho)$$

(Γ_3) $\det G \neq 0$ の場合¹、

$$G^{-1} \text{ の } (j, k) \text{ 成分} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(k-j)}}{\Phi_p^{(N)}(\rho)}$$

補題 7.1.1

$$\Phi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta}) = -\frac{N}{2\rho} \sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^* \\ n \equiv p}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{|n|} e^{in\theta}$$

この補題²の証明は、補題 3 - 2 - 1 の式を ρ で偏微分すればよい。

これらから定理 7 - 1 が成立することが分る。

近似解の公式については、§ 3 - 3 と同様の議論により、

補題 7.1.2

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \nu} u(\rho\omega^j) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\Phi_p^{(N)}(\rho)}$$

が成り立つ。

¹第一版では「 $\det G = 0$ の場合」と誤植があった。

²この補題も $|n|$ が n のままになっている誤植があった。

7.2 近似解の Fourier 級数展開

第四章と同様にして、まず、

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{|n|} f_n e^{in\theta}$$

これから、

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(\rho\omega^j) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{|n|}{\rho} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{|n|} f_n \omega^{nj}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\Phi_p^{(N)}(\rho)} &= \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial \nu} u(\rho\omega^j) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\Phi_p^{(N)}(\rho)} \\ &= \dots \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\Phi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^* \\ n \equiv p}} \frac{|n|}{\rho} f_n \right) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \Theta_p^{(N)} \cdot \varphi_p^{(N)}(x) \end{aligned}$$

ただし、

$$\Theta_p^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^* \\ n \equiv p}} |n| f_n \right)$$

と定義する。

$\varphi_p^{(N)}$ については、補題 3 - 2 - 1 が成立するから、

$$\begin{aligned} u^{(N)}(\rho e^{i\theta}) &= N \log R \times \Theta_0^{(N)} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{N-1} \Theta_p^{(N)} \left(-\frac{N}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{1}{|n|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|n|} e^{in\theta} \right) \\ &= N \Theta_0^{(N)} \log R - \frac{N}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{\Theta_n^{(N)}}{|n|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{|n|} e^{in\theta} \end{aligned}$$

補題 7.2.1

$$\begin{aligned} u^{(N)}(0) &= N \Theta_0^{(N)} \log R \\ &= \frac{N \log R}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \left(\sum_{\substack{n \in \mathbf{Z}^* \\ n \equiv 0}} |n| f_n \right) \end{aligned}$$

u が $r_0 > \rho$ なる r_0 に対して、 $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| \leq r_0\}$ まで調和に拡張できるならば、これは、

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{N \log R}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{m=1}^{\infty} m N \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{mN} (e^{imN\psi} + e^{-imN\psi}) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi$$

に等しい。

7.3 Neumann 問題の近似解の収束

ここでは、定理 2 - 1 に対応する定理を述べて証明を与える。記号は定理 7 - 1 と同じものとする。

定理 7.2 (N_f) の解 u が、 $r_0 > \rho$ なる r_0 に対して

$$\{w \in C(\overline{B(0; r_0)}) \cap C^\infty; \Delta w = 0\}$$

の要素に拡張されるならば、(N_f) の C S M ($\{y_k\}_{k=1}^N; \{x_k\}_{k=1}^N$) による近似解 $u^{(N)}$ は任意の N に対して、以下の評価を満たす。

$$E \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{|x| \leq \rho} |\{u(x) - u(0)\} - \{u^{(N)}(x) - u^{(N)}(0)\}|$$

と置く。

1. $r_0 \rho / R^2 > 1$ のとき

$$E \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{N+4}{(1-\rho/r_0)^2} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{(N+1)/2} + \frac{7}{\frac{r_0 \rho}{R^2} - 1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \right]$$

2. $r_0 \rho / R^2 = 1$ のとき

$$E \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{N+4}{(1-\rho/r_0)^2} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + \frac{7N}{2} \right] \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{N/2}$$

3. $r_0 \rho / R^2 < 1$ のとき

$$E \leq \sup\{|u(x)|; |x| = r_0\} \times \left[\frac{N+4}{(1-\rho/r_0)^2} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{1/2} + \frac{7}{1 - \frac{\rho r_0}{R^2}} \right] \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{N/2}$$

証明 円板 $B(0; r_0)$ に関する Poisson 核

$$P(r, \theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta})$$

と、

$$\begin{aligned} Q(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} P(r, \theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int P(r, \theta - \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u(\rho \omega^j) &= \frac{1}{2\pi} \int Q(\rho, j\phi - \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi \end{aligned}$$

と積分表示される。

これから、

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int K^{(N)}(x; \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi$$

ここで、

$$K^{(N)}(x; \psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} Q(\rho, j\phi - \psi) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\Phi_p^{(N)}(\rho)}$$

よって、

$$e^{(N)}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} (u(x) - u(0)) - (u^{(N)}(x) - u^{(N)}(0))$$

と置くと、

$$e^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi^{(N)}(x; \psi) u(r_0 e^{i\psi}) d\psi$$

ここで、

$$\Psi^{(N)}(r e^{i\theta}; \psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \{P(r, \theta - \psi) - 1\} - \{K^{(N)}(r e^{i\theta}; \psi) - h^{(N)}(\psi)\}$$

$$h^{(N)}(\psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{N \log R}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{m=1}^{\infty} mN \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{mN} (e^{imN\psi} + e^{-imN\psi})$$

($h^{(N)}(\psi)$ については、補題 7 - 2 - 1 を参照。)

補題 7.3.1 (近似核の級数展開)

$$K^{(N)}(x; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\rho} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \times \left[e^{-in\psi} \frac{\varphi_n^{(N)}(x)}{\Phi_n^{(N)}(\rho)} + e^{in\psi} \frac{\varphi_n^{(N)}(\bar{x})}{\Phi_n^{(N)}(\rho)} \right]$$

証明は、これまでと同様なので省く。

これから、誤差を与える核は

$$\begin{aligned} \Psi^{(N)}(r e^{i\theta}; \psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-in\psi} \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{in\theta} - \frac{n}{\rho} \left(\frac{\rho}{r_0}\right) \frac{\varphi_n^{(N)}(r e^{i\theta})}{\Phi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^{in\psi} \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{-in\theta} - \frac{n}{\rho} \left(\frac{\rho}{r_0}\right) \frac{\varphi_n^{(N)}(r e^{-i\theta})}{\Phi_n^{(N)}(\rho)} \right\} \right] \\ &\quad + \frac{N \log R}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \sum_{m=1}^{\infty} mN \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{mN} (e^{imN\psi} + e^{-imN\psi}) \end{aligned}$$

それゆえ、

$$g_p^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \sup_{\theta} \left| e^{ip\theta} - \frac{p\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} + \frac{pN \log R}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \right| & p \equiv 0 \pmod{N} \text{ の場合} \\ \sup_{\theta} \left| e^{ip\theta} - \frac{p\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\rho \Phi_p^{(N)}(\rho)} \right| & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と置くと、Dirichlet 境界条件の場合と同様に、

$$|\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi)| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n g_n^{(N)}$$

後は、 $g_n^{(N)}$ の評価に関する次の補題を用いれば、定理が証明される。

補題 7.3.2 (1) $\forall p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$g_p^{(N)} \leq 1 + p$$

(2) $1 \leq \forall p \leq [N/2]$ に対して、

$$g_p^{(N)} \leq \frac{7}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-2p}$$

この補題の証明も、これまでと同様なので略する。

第8章 数値計算(1) 定理の数値実験による検証

8.1 実験の内容

定理 2 - 1, 2 - 2, 及びそれらを千鳥形配置にした場合について数値実験を行った。計算結果をグラフ表示したものを章末に掲げる。これら実験から定理の『実証』をすることをこの章の目的とする。これら実験を十分に理解するには丸め誤差に関する考察が欠かせないが、これについては、この章では簡単に済ませ、次章で詳述する。

各例を

対向形配置の代用電荷法	.. C S M
対向形配置の双極子シミュレーション	.. D S M
千鳥形配置の代用電荷法	.. C C S M
千鳥形配置の双極子シミュレーション	.. C D S M

のように略記する。

境界値として、次の二種類の関数を選んだ。

a) 調和多項式

$$\rho^m \cos m\theta, \quad \rho^m \sin m\theta \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

b) 対数ポテンシャル

$$x \mapsto \log |x - p| \quad (p > \rho)$$

誤差自体が調和関数であるから、最大値の見積りは境界上で行えばよいので、擬似乱数を用いて境界上の 100 個の点を選んで、その点における近似解と真の解の値の差の絶対値を計算して、その最大値で

$$\|u - u^{(N)}\|_{\infty} = \max\{|u(x) - u^{(N)}(x)|; |x| \leq \rho\}$$

を見積る (多少乱暴ではあるが)。

極、拘束点の個数 N を横軸に (60 位まで)、誤差 (の見積り) の常用対数 (の符号を変えたもの) を縦軸に取って、結果をグラフに表示して誤差についての考察を行う。

定理 5 - 1 があるから、千鳥形配置の場合は、 N に奇数の値 3, 5, 7, ... を取らせて動かすのは勿論である。

8.2 調和多項式を境界条件に選んだ場合の結果と考察

グラフ 8-2-1 ~ 8-2-8 を参照して載きたい (C S M, D S M, C C S M, C D S M の各場合の数値計算例と、C S M において、 ρ を一定にして R を変化させた数値計算例を挙げている)。グラフから読み取れるいくつかの傾向を列挙し、それらに対する解釈を述べる。

- イ) いずれの場合も、確かに近似解が得られたようである。特に $R = 2, \rho = 1$ としたときは、CSM, DSM, CCSM, CDSMのうち、何れの方法を用いても近似解の精度は申し分ないと言える。
- ロ) 誤差は、 N が大きくなるにつれ減少するがやがて頭打になり、遂には増加し始める兆しを見せるものさえある。これは、代用電荷法本来の誤差は N が増加すると共に減少するが、有限精度の計算を行うことに由来する数値計算誤差は増加して行くからということとで説明できる。
- ハ) R が大きいほど最終的な誤差に到達するのが早くなる ($R = \sqrt{2}$ では、 $N = 60$ で未だ最終的な誤差には到達しないが、 $R = 4$ では、 N が 30 未満で最終的な誤差に到達している。)。これは定理の主張から予想されることである(尚、次の項-ホ も参照せよ)。しかし、 R が大き過ぎると、最終的に到達する誤差は大きくなる。これについては次章で詳しく考察するが、一言でいって、丸め誤差の影響である。
- ニ) N が小さいところ、大きいところを除けば、誤差の対数と N の間には一次の相関関係がある。これは、誤差が指数的に減少していることを意味している。グラフの直線部分の傾きから、“指数の底” は大体 (ρ/R) に等しいことが分る。これらは、定理の主張から納得できることである。
- ホ) CSM は DSM と、CCSM は CDSM と、それぞれ、殆ど同じ誤差評価を持つ。CSM と DSM を比べると僅かに CSM の収束が速いようであるが、最終的な誤差は同等である。
- ヘ) 境界値の振動数 (上の式の m のこと) が高い方が、誤差が大きい。これは振動数が高いほど、定理の評価式右辺に現われる最大値ノルムが大きいためであると納得がいく。
- ト) グラフ以外の、実験の副産物として得られたデータから分ることであるが、行列式の絶対値が小さい (10^{-300} 以下になることもある)。行列式というのは ‘normalize’ された概念ではないから、これから直ちに問題の条件が厳しいことを主張はできないが。

8.3 対数ポテンシャルを境界条件に選んだ場合の結果と考察

この節では、グラフ 8-3-1 ~ 8-3-4 を参照して載きたい。

定理 2 - 1 , 2 - 2 によれば、誤差が指数減少すると主張する際の “指数の底” は、

$$\begin{array}{ll} 1 < r_0 < (R^2/\rho) & \text{の場合 } (\rho/r_0)^{1/2} \\ (R^2/\rho) < r_0 & \text{の場合 } (\rho/R) \end{array}$$

となる。§ 8 - 2 では、全平面で調和な関数を真の解とするような境界値を選んだが、この節では、定理の陳述中に現われる、真の解がどこまで調和に拡張されるかを表わす数 r_0 を変えてみて、“誤差の減少の速さ” が定理から示唆されるようであることを検証することを考えた。具体的には、対数ポテンシャル $\log|x - p|$ の極の位置 p をパラメーターとして動かして実験してみた。

グラフ 8-3-1 , 8-3-2 によれば、やはり誤差が指数減少していることが見てとれる。肝心なのはグラフの傾きから得られる、“指数の底” であるが、一見して次のことが分る。

- 1) p が大きい程、傾きが大きい (指数の底は小さい)。
- 2) p がある程度以上大きくなると傾きは変化しなくなる。

このことから、まず定性的には定理から示唆される通りであることが分る。次にオペレーター (計算機を操作する人間) にグラフの直線状の部分を選ばせ、範囲を指定させることにより、“指数の底” を計算してグラフを作ってみたのがグラフ 8-3-3, 8-3-4 である。横軸が p , 縦軸が “指数の底” を表わす。定理から示唆される曲線を破線で示したが、実験結果は大体の線を出していると考えられる。特に、dipole simulation の場合はきれいに合っている。

第9章 数値計算(2) 丸め誤差に関する考察

計算機 (いわゆる浮動小数点数を用いて計算する普通の computer のこと) を用いて、数学的なモデルについて、数値シミュレーションを行う場合、様々な誤差を考慮する必要がある。例えば、

- (1) データを計算機に入力する際の入力誤差
計算機は有限桁の数しか扱えないため、数を丸めて入力する必要がある場合が多い。
- (2) 採用する近似公式そのものが持つ打ち切り誤差 (別名を公式誤差)
この論文の定理等に現われた、 u と $u^{(N)}$ の差がこれに相当する。
- (3) 計算機の中で計算を遂行する際に生じる計算誤差 (丸め誤差)

などが代表的なものである。以下、この章では丸め誤差について若干の考察を行う。

9.1 第八章の数値実験結果の考察 (続き)

定理 2 - 1 等の誤差評価式を見れば、電荷の個数 N が大きいほど誤差が小さいと期待されることになるが、計算機で実験するとそうはならず、 N がある程度まで大きくなると、それ以上 N が大きくなっても誤差は減少しなくなるのは前章で見たとうりである。これは、 N が大きくなると増加する丸め誤差によるものである。シミュレーションにより得られる近似解の誤差 E を

$$E = (\text{打ち切り誤差}) + (\text{丸め誤差})$$

と、大雑把に捕えて説明を試みる。 N が小さいときは

$$(\text{打ち切り誤差}) \gg (\text{丸め誤差})$$

であり、誤差 E の中で (打ち切り誤差) が主要なものとなるので、 N の増加と共に E は減少するし、 E の挙動は、定理の評価式から予想される打ち切り誤差のそれに近い。そして、 N が大きくなり、(丸め誤差) と (打ち切り誤差) がほぼ同じ大きさになると、 E の挙動が公式から予想される (打ち切り誤差) のそれとは離れていく。さらに N を大きくして

$$(\text{打ち切り誤差}) \ll (\text{丸め誤差})$$

とすると、誤差 E の内で、(丸め誤差) が主要なものとなり、 N の増加に伴い E が減少することはない。

9.2 今後の課題

前節で述べたように、計算機で近似解を求める際に

必要な精度を得るために計算量をなるべく少なくするためには
同じ計算量でより高精度に計算するためには

極、拘束点の数や配置をどう取るべきか、またその際の近似解の精度や計算の手間は他の手法に比べるとどうなるか、等の問に答えるためには、丸め誤差を考慮しなければならない。

当初、この問題を考え始めたときは、丸め誤差に関する議論に不慣れなこともあって、今回取り扱った円板の場合には、次の順序で『解く』ことが出来ると考えた。

1. ある状況の下で (丸め誤差) はどの程度の大きさか、見積る。
2. 拘束点、極の配置の仕方等、幾何学的な条件が与えられたとして、誤差 E を最も小さくするには N を大体どれ位の大きさに取れば良いか調べる。
3. (b) の誤差を最小にするには、拘束点、極の配置をどう選べば良いか？
4. (c) において、誤差の大きさはどれくらいか？これは、代用電荷法以外の他の方法と比べてどうか？

残念なことに (a) の段階で挫折してしまった。その理由は連立一次方程式を解く際の誤差が事前にうまく評価できないことである。一般論から得られる最悪の誤差に関する評価が、相当な過大評価になってしまう。

しかし、丸め誤差を考慮した計算へのアプローチは上の仕方以外にも考えられる。この方面の研究は、今後の課題になるであろう。

9.3 係数行列の条件数

計算の各段階で様々な丸め誤差が生じるが、その内で一番大きいものは電荷の量を決定するために連立一次方程式を解く際の誤差であろうと思われる。前節で述べたように連立一次方程式を解く際の誤差については一般論も用意されているが、今一つ扱いにくい。しかし、とにかく行列の条件数が考察の基本となるので、定理 2 - 1 の場合にこの量を評価してみた。これによって、前章の数値実験結果を、より詳しく議論出来ることになる。

条件数といっても、ベクトルに与えるノルムに依存する訳であるが、ここでは、最大値ノルムとユークリッド・ノルムの二種類を考える。

(定理 2 - 1 の内容を考慮して、ベクトルには最大値ノルムを、行列にはベクトルのノルムから誘導される作用素ノルムを与える。すると、 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$$

が成立することは、よく知られている。この論文中の定理の場合には係数行列 G と、その逆行列 G^{-1} の成分は分っているから、条件数

$$\text{cond } G = \|G\| \cdot \|G^{-1}\|$$

の値を見積ることができる訳である。しかし、 $\|G^{-1}\|$ の評価が余り簡単ではなく、一応は

$$\text{Constant}(R, \rho) \times N(R/\rho)^{N/2}$$

の形の量で上と下からの評価が得られはするものの、実際に数値計算する際の N の値に対して良い評価が得にくい。

多少、便宜的な感じもするが、)ベクトルにユークリッド・ノルムを与えた場合には、係数行列 G が対称であるから、条件数は次のように簡単になる。

$$\text{cond } G = \frac{\max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(G)\}}{\min\{|\mu|; \mu \in \sigma(G)\}}$$

ところで、定理 2 - 1 の場合には § 3 - 2 の結果より、

$$\begin{aligned} \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(G)\} &= |\varphi_0^{(N)}(\rho)| \quad (N \text{ が十分大きいとき . 実際には簡単に満たされる}) \\ \min\{|\mu|; \mu \in \sigma(G)\} &= |\varphi_{[N/2]}^{(N)}(\rho)| \end{aligned}$$

となるので、

$$\text{cond } G = \frac{|\varphi_0^{(N)}(\rho)|}{|\varphi_{[N/2]}^{(N)}(\rho)|}$$

簡単のため、 $N = 2L$ としよう。

補題 3 - 1 - 1 の級数展開より、これは

$$\frac{N|\log R| + (\text{higher order})}{\frac{N}{2} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{\rho}{R}\right)^L + \frac{1}{L} \left(\frac{\rho}{R}\right)^L \right] + (\text{higher order})} \sim \frac{N|\log R|}{2} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N/2} \quad (\text{as } N \rightarrow \infty)$$

と、大雑把に見積ることが出来る。 N が奇数の場合もほぼ同様である。結局、条件数は指数的に増大することが分る。

定理 2 - 1 の誤差評価式によれば、 R は大きく取ったほうが近似解の精度が良いように考えられるが、実際に計算機で数値計算をする場合、この条件の悪さが問題となってそうはならない。(§ 8 - 2 (八) の考察を参照。)

9.4 千鳥形配置に関する一つの考察

ここでは、第五章で提出した問題

電気工学者の示す『対向形配置の方が千鳥形配置よりも常に精度が高い。』という経験則にも関わらず、定理 5 - 1 の誤差評価は、定理 2 - 1 のそれと殆ど変わらない。これには、A . 誤差評価が粗いため、差が出なかった、B . (少なくとも)円板の場合は対向形配置と千鳥形配置で差がない、という二つの理由が考えられるが、何れが正しいか？

を再び考えてみる。第八章で示した数値実験結果によれば、B . が正しいようである。もちろん、私が実験したのは数少ない境界値に対してであるから、これだけで断定することは出来ない。しかし、ここでは詳述を控えるが、近似解を Fourier 級数展開して考えてみると、上の定

理 5 - 1 の評価は十分良い評価 (あまり過大評価していない、という意味) であると考えて良いようである。従って、円板の場合には対向形配置と千鳥形配置で得られる近似解の精度に大した差はない、と一応は結論できる。

しかし、円板の場合は定理 5 - 1 の (1) 『偶数の N に対しては近似解が存在しない、奇数の N に対しては N がある程度大きければ近似解が一意に存在する。』があるから問題ないが、一般の領域では、連立一次方程式の係数行列の正則性の条件が事前に分らない。以下では、これが大変な問題であることを論じて、この章を締め括りたい。

実を言うと、数値実験を始めた頃は、まだ定理 5 - 1 (1) が得られていなかったの、偶数の N に対して計算していたのである。もし、計算機が誤差の無い計算を遂行できるならば、行列が特異であることが分った筈であるが、実際には丸め誤差が入るので、行列式は 0 にならず、計算が続行され、とにかく結果が出てきてしまう。その結果が、対向形配置には劣るものの、結構良い近似解になっているのである (グラフ 9-4-1 参照)。上述の経験則を知っていたこともあって、何も疑問を抱かなかった。定理 5 - 1 を発見してから慌てて電荷数を奇数にして再計算したところ、第八章に掲げた結果となった。いまでは、 N が偶数の際の“幻の解”が何であるか説明することが出来る。後退誤差解析の考え方によれば、数値的に連立一次方程式を解く時に得られた解は、元の連立一次方程式の係数行列 G を、 $G + E$ と“摂動した”連立一次方程式を厳密に解いた解となっているとみなせる。摂動したおかげで係数行列は正則になった、ただし、元の問題の係数行列が正則ではないのだから、ill-conditioned であると考えられる。そのために、悪い結果が、悪いながらも出てくることになったのだと理解できる。そこで次のような実験を考えてみた。第五章の記号を用いよう。 $\kappa = \frac{1}{2}$ の場合は、 N が偶数のとき、問題が“特異”になるが、ここで、 κ をパラメーターとして動かしてみる。

$$\kappa = \frac{1}{2} - 10^{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

に対して計算した結果が、グラフ 9-4-2 である。ここで、境界条件は $f \equiv 1$ を選んだが、他の調和多項式や、対数ポテンシャルの場合も同様の結果が得られている。このグラフから次の傾向が読みとれる。

- a) κ の値によらず、 N が小さいときは誤差は殆ど等しく、指数減少する。
- b) n が増える (κ が $\frac{1}{2}$ に近くなる) につれ、誤差を表わす曲線の頭打ちになるのが早くなり (小さい N に対して最小の誤差に到達するようになり)、最終的に得られる誤差が大きくなる。

これから次のようなことが頭に浮かぶ。

-) $\kappa \in]0, 1/2[$ であれば、公式誤差は対向形のそれと同様のものが得られる。
-) しかし、 κ が $\frac{1}{2}$ に近いと、 N が増加する際に条件数が速く増大するので、数値解の誤差は大きくなってしまう。

ここに至って、一般の κ の下での、定理 5 - 1 に対応する命題に関心が生まれるが、少し考えれば確かに成立することが分る。一番の問題となるところは $|\varphi_{N/2}^{(N)}(\rho\delta)|$ を下から評価するところであるが、

$$|\varphi_{N/2}^{(N)}(\rho\delta)| \geq \text{const.} \times \cos(\kappa\pi)(\rho/R)^{N/2} \quad (N \text{ が十分大のとき})$$

が成立するので、 $\kappa \in [0, \frac{1}{2}[$ であれば、とにかく定理 5-1 と同様の“指数減少”を表わす公式が得られることが分る。

従って、() は正しい。しかし、() については、条件数の見積りがうまく出来ないこともあって、現在では検証しきれていない。($\kappa = 0$ でないときは、行列が対称とは限らないから § 9-3 の イ) の議論が適用できない。)

この考察が正しければ、円板領域の場合には、次のようにまとめることができるだろう。

『問題が“特異”となる場合を除けば、配置が対向形からずれても、公式誤差はせいぜい定数倍の差しかない。数値計算した場合は条件数が重要な要因で、これに注意すれば、対向形でなくとも良好な結果が得られる。』

こうして考えると、一般の場合に、係数行列の正則性の条件が事前に分らないことは大きな問題だということが分る。円板領域であったから、『千鳥形，電荷数偶数 \implies 行列特異』となったのであり、普通の領域で、実験者が適当に電荷、極を配置した際に係数行列が特異になることは稀なことかもしれないが、条件数を必要以上に大きくしてしまい、近似解の精度を落してしまうことはありそうである。やはり、数学的な解析が不可欠であると考える。

第10章 補足

10.1 定理 2-2 (dipole simulation) の証明の概要

$$\begin{aligned}
 D(x, y) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{(\nu_y | y - x)}{|x - y|^2} \\
 G &\stackrel{\text{def.}}{=} (j, k)\text{-成分が } D(x_j, y_k) \text{ の } N \text{ 次正方行列。} \\
 L_k &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{R - \rho \cos k\phi}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos k\phi} \\
 \varphi_p^{(N)}(z) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{pk} D(z, R\omega^k)
 \end{aligned}$$

とおくと、定理 2-1 と大体同じに証明がすすむ。

まず、係数行列 G については、

$$G \text{ の } (j, k)\text{-成分} = L_{k-j}$$

となるので、 $(\Gamma_1) \sim (\Gamma_4)$ が成立する：

$$(\Gamma_1) \sigma(G) = \{L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1}; p = 0, \dots, N-1\}$$

$$(\Gamma_2) \det G = \prod_{p=0}^{N-1} (L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1})$$

$(\Gamma_3) \det G \neq 0$ ならば、

$$G^{-1} \text{ の第 } (i, j) \text{ 成分} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{\omega^{p(i-j)}}{L_0 + \omega^p L_1 + \cdots + \omega^{p(N-1)} L_{N-1}}$$

- $(\Gamma_4) \sigma(G) \subset \mathbf{R}$

そして、補題 3-2-1 に対応して、次の命題が成立する。

補題 10.1.1 (1)

$$\varphi_0^{(N)}(z) = \frac{N}{2R} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{kN} (e^{ikN\theta} + e^{-ikN\theta}) \right]$$

$$(2) 1 \leq \forall p \leq N - 1$$

$$\varphi_p^{(N)}(z) = \frac{N}{2R} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{kN+p} e^{i(kN+p)\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{kN-p} e^{-i(kN-p)\theta} \right]$$

が成立する (証明は、補題 3-2-1 の式を R で偏微分する)。

補題 3-2-2, 3 に対応して、

補題 10.1.2 (1) $(0 \leq \forall p \leq N - 1)$: $z \mapsto \varphi_p^{(N)}(z)$ は調和。

$$(2) (1 \leq \forall p \leq N - 1): \varphi_p^{(N)}(z) = \varphi_p^{(N)}(z) \varphi_0^{(N)}(z) = \varphi_0^{(N)}(z)$$

$$(3) (0 \leq \forall p \leq N - 1) (\forall r \in [0, R]): \varphi_p^{(N)}(r) \in \mathbf{R}$$

$$(4-a) \varphi_0^{(N)}(0) = N/R$$

$$(4-b) (1 \leq \forall p \leq N - 1): \varphi_p^{(N)}(0) = 0$$

(5) $(0 \leq \forall p \leq N - 1)$: 関数 $[0, R] \ni r \mapsto \varphi_p^{(N)}(r)$ は単調増加
特に $\varphi_p^{(N)}(r) \geq 0$ (等号は $1 \leq p \leq N - 1$ and $r = 0$)

$$(6) (0 \leq \forall p \leq N - 1) (\forall r \geq 0):$$

$$\sup\{|\varphi_p^{(N)}(z)|; |z| = r\} = |\varphi_p^{(N)}(r)|$$

$$(7) (0 \leq \forall p \leq N - 1): \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_p^{(N)}(r) = +\infty.$$

$$(8) (0 \leq \forall p \leq N - 1): \varphi_p^{(N)}(\omega z) = \omega^p \varphi_p^{(N)}(z)$$

$$(9) \max\{\varphi_p^{(N)}(\rho); p = 1, \dots, N - 1\} = \varphi_{[N/2]}^{(N)}(\rho)$$

補題 10.1.3 G は正則である。

$\varphi_p^{(N)}$ を上で定義した意味にとれば、§ 3 - 3 の近似解の公式がそのまま成り立つ。誤差評価も § 3 - 4 と、ほぼ同様に遂行できる。まず、補題 3 - 4 - 1 の近似核の級数展開の公式は $\varphi_p^{(N)}$ をこの節での意味に取れば成立する。そして、補題 3-4-2 に対応して、

補題 10.1.4 (1) $(\forall N \in \mathbf{N}) (\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\})$:

$$g_p^{(N)} \leq 2$$

(2-a) $(\forall N \in \mathbf{N})$:

$$g_0^{(N)} \leq 2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N$$

(2-b) $(\forall N \in \mathbf{N}) (1 \leq \forall p \leq N - 1)$:

$$g_p^{(N)} \leq 4 \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N-2p}$$

を用いればよい。

10.2 定理 5 - 1 の証明の概要

$$\begin{aligned} L_k &\stackrel{\text{def.}}{=} \log |\rho\delta - R\omega^k| \\ &= \frac{1}{2} \log \left\{ \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\phi \right\} \\ &\text{ここで、 } \delta = \exp(i\phi/2) \end{aligned}$$

と置くと、やはり係数行列 G について、

$$G \text{ の } (j, k)\text{-成分} = L_{k-j}$$

が成り立つので、 $(\Gamma_1) \sim (\Gamma_3)$ は成立する。しかし、対向形配置と異なり、 G は対称ではなくなるので、 (Γ_4) は成立しない。

$\varphi_p^{(N)}(z)$ は対向形配置の場合と同じ式で定義すると、

$$\sigma(G) = \{\varphi_p^{(N)}(\rho\delta); p = 0, \dots, N-1\}$$

となる。

ここでも、補題 3-2-1, 3-2-2 は有効であるが、固有値が $\varphi_p^{(N)}(\rho)$ ではなく、 $\varphi_p^{(N)}(\rho\delta)$ であることに注意する。

定理 5-1 の (1) の証明は次の補題から分る (証明略)。

補題 10.2.1 (1-a)

$$\varphi_0^{(N)}(\rho\delta) = \log(R^N + \rho^N)$$

(1-b) ($1 \leq \forall p \leq N-1$):

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(N)}(\rho\delta) &= -\frac{N\delta^p}{2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{mN+p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN+p} \delta^{mN} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mN-p} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{mN-p} \delta^{-mN} \right] \\ \varphi_{N-p}^{(N)}(\rho\delta) &= \delta^{-2p} \varphi_p^{(N)}(\rho\delta) \end{aligned}$$

(2) N : even のとき、 $\varphi_{N/2}^{(N)}(\rho\delta) = 0$

(3) N : odd かつ、 $2(1 - \rho/R) > (\rho/R)^{(N+1)/2}$ であれば、 $(1 \leq \forall p \leq N-1)$: $\varphi_p^{(N)}(\rho\delta) \neq 0$

$$\det G \neq 0$$

となる限り、近似解が

$$u^{(N)}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j,p=0}^{N-1} u(\rho\delta\omega^j) \omega^{-pj} \frac{\varphi_p^{(N)}(x)}{\varphi_p^{(N)}(\rho\delta)}$$

と書けることは、対向形配置の場合と同様の計算で示すことができる。

これから、誤差を与える核 $\Psi^{(N)}$ をこれまでと同様に定義すると次式を証明することが出来る。

$$|\Psi^{(N)}(\rho e^{i\theta}; \psi)| \leq \left| 1 - \frac{\varphi_0^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_0^{(N)}(\rho\delta)} \right| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^k \times \left| e^{ik\theta} - \delta^k \frac{\varphi_k^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_k^{(N)}(\rho\delta)} \right|$$

従って、

$$c_p^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\theta} \left| \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho\delta)} \right|$$

$$g_p^{(N)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\theta} \left| e^{ip\theta} - \delta^p \frac{\varphi_p^{(N)}(\rho e^{i\theta})}{\varphi_p^{(N)}(\rho\delta)} \right|$$

を評価すれば良いことになるが、これについては補題 3-4-2 に対応して、

補題 10.2.2 N に関する次の 5 個の条件を扱う。

(ア) $(\rho/R) \leq \frac{1}{2}$

(イ) $2(1 - \rho/R) > (\rho/R)^{(N+1)/2}$

(ウ) $2(3N - 1) \geq (N^2 - 1) \cdot (\rho/R)^{N-1}$

(エ) $2(1 - 1/N)(\rho/R)^N(R + \rho)/(R - \rho) < 1$

(オ) $N|\log R| \geq 2 \log\{1 + (\rho/R)^N\}$

(1) $(\forall N \in \mathbf{N})$:

$$c_0^{(N)} \leq \max \left\{ 1, \left| \frac{\log(R^N - \rho^N)}{\log(R^N + \rho^N)} \right| \right\}$$

(2) 条件 (イ), (ウ), (エ) が成り立つならば、 $1 \leq \forall p \leq [N/2]$ に対して、

$$c_p^{(N)} \leq \frac{N}{N-p} \cdot \frac{1}{1 - \rho/R}$$

ゆえに、 $\forall p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$c_p^{(N)} \leq \max \left\{ \frac{2}{1 - \rho/R}, \left| \frac{\log(R^N - \rho^N)}{\log(R^N + \rho^N)} \right| \right\}$$

(3-a) $R > 1$ の場合 . 条件 (ア) が成り立つならば、

$$g_0^{(N)} \leq \frac{4}{N \log R} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N$$

(3-b) $0 < R < 1$ の場合 . 条件 (ア), (オ) が成り立つならば、

$$g_0^{(N)} \leq \frac{8}{N|\log R|} \left(\frac{\rho}{R} \right)^N$$

(2) 条件 (ア), (イ), (ウ) が成り立つならば、 $1 \leq \forall p \leq [N/2]$ に対して、

$$g_p^{(N)} \leq \frac{8p}{N-p} \frac{1}{1 - \rho/R} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{N-2p}$$

が成り立つ。これから定理が証明される。

関連図書

- [1] 村島定行, 『代用電荷法とその応用』, 森北出版 (1983).
- [2] M.Shōji, On an application of the charge simulation method to a free boundary problem, to appear in J.Fac.Sci.Univ.of Tokyo.
- [3] 森 正武, 『数値解析』, 共立出版 (1973).

Charge Simulation

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

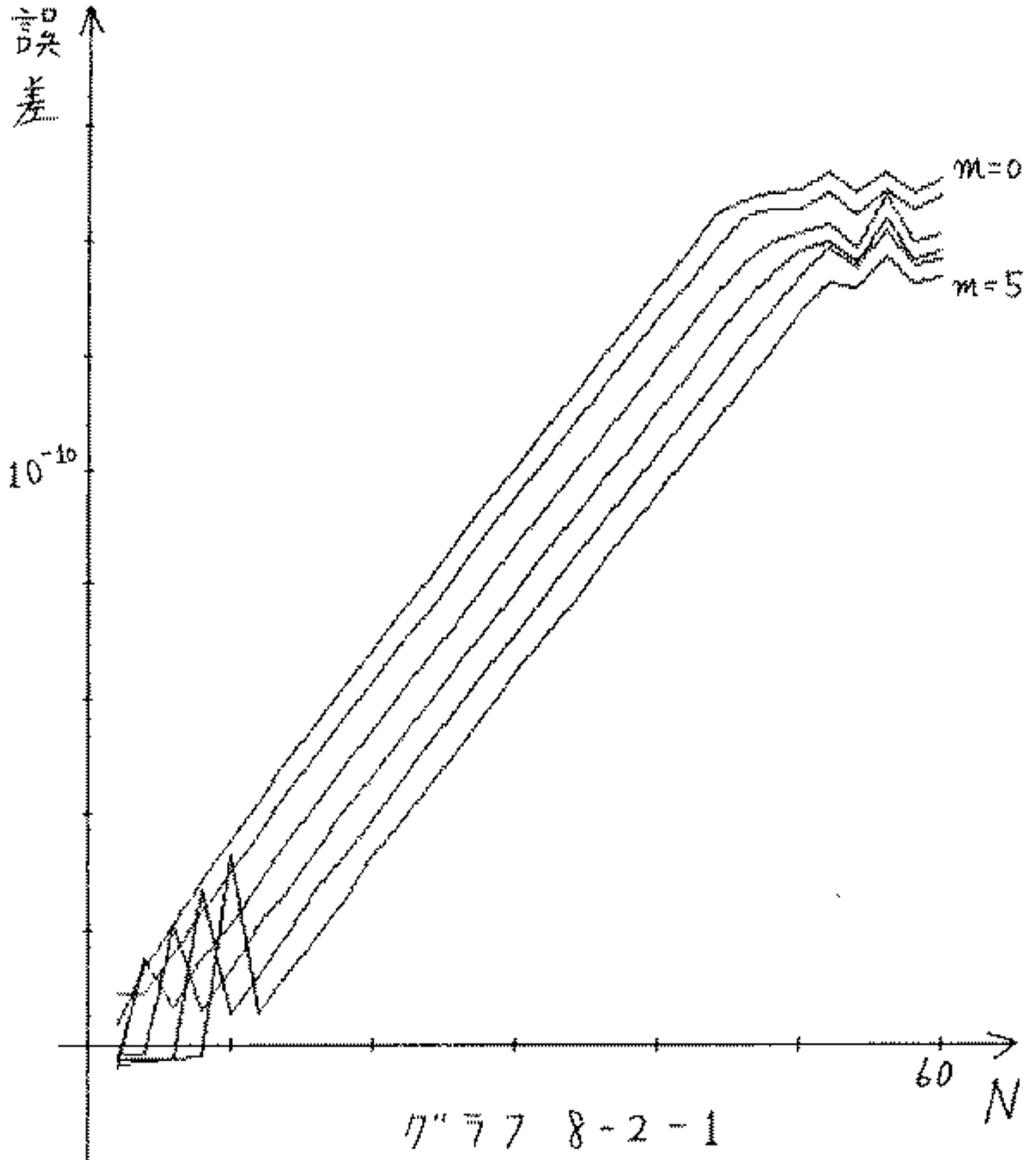
電荷を置く円筒の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



CHARGE SIMULATION

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

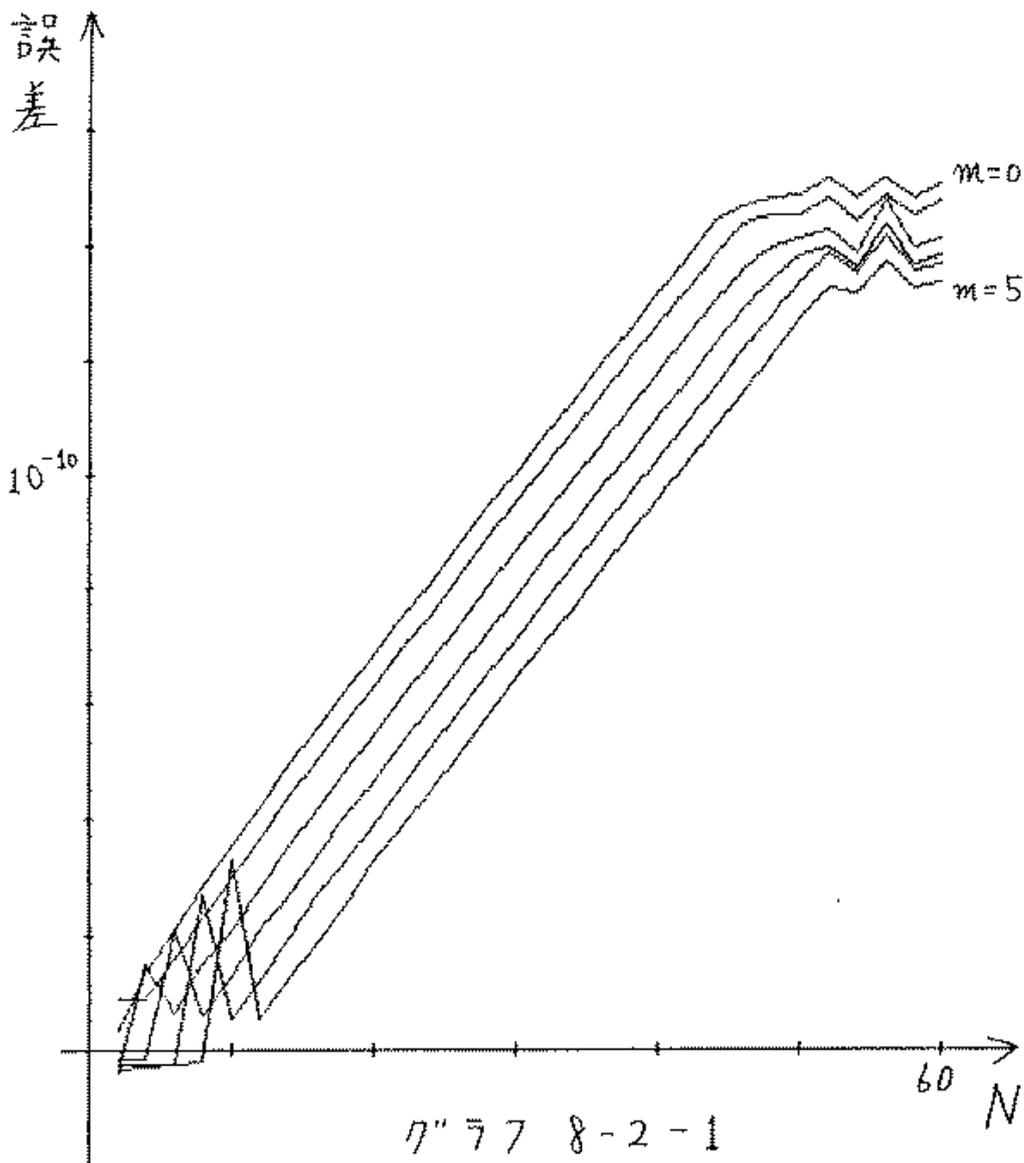
電荷を覆く円筒の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



ORIGIN SIMULATION

円板の半径 $\rho = 1.00000000000000E+000$

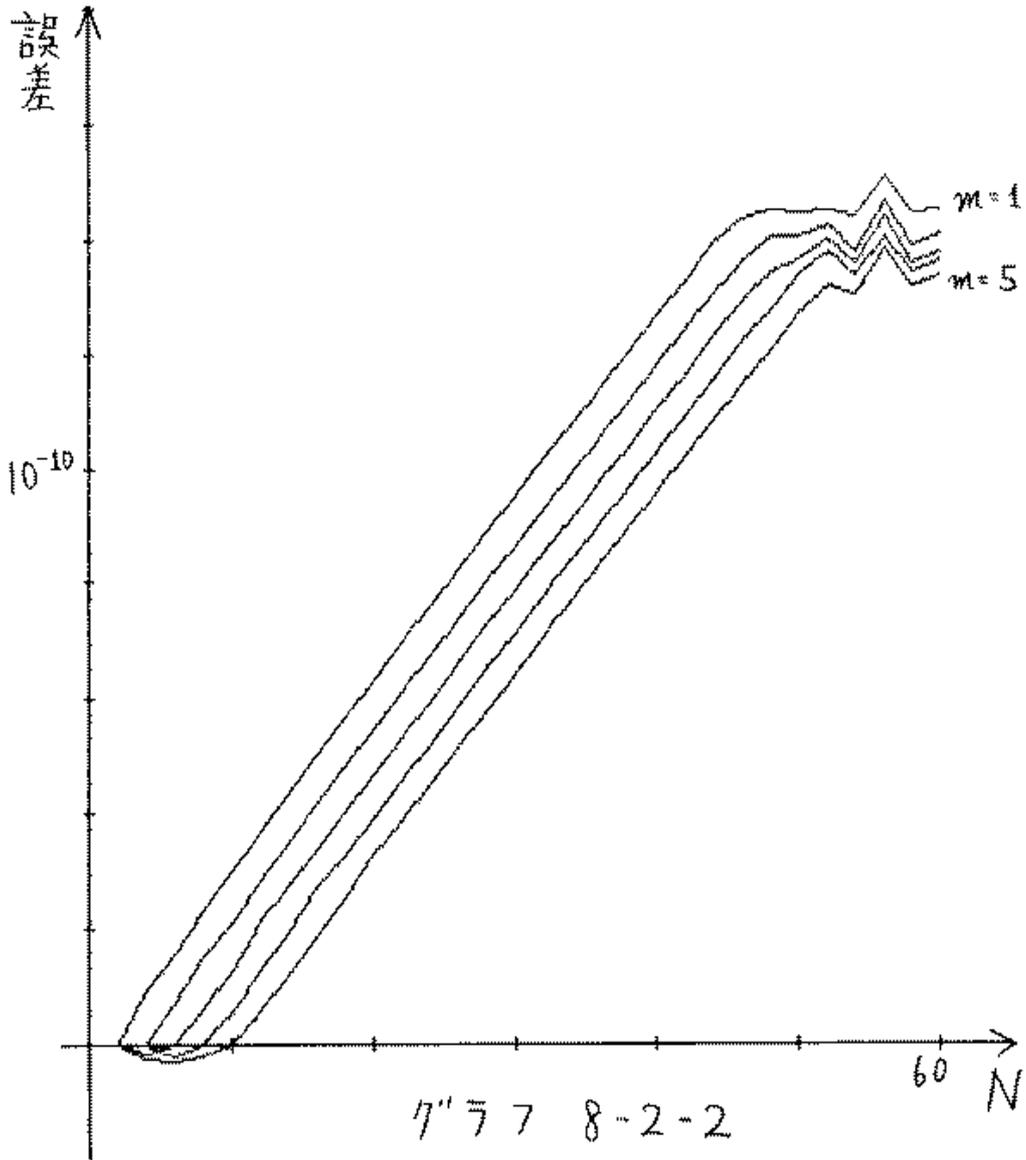
電荷を置く円筒の半径 $R = 2.00000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \sin(m \theta)$ を境界値として計算

1 2 3 4 5.



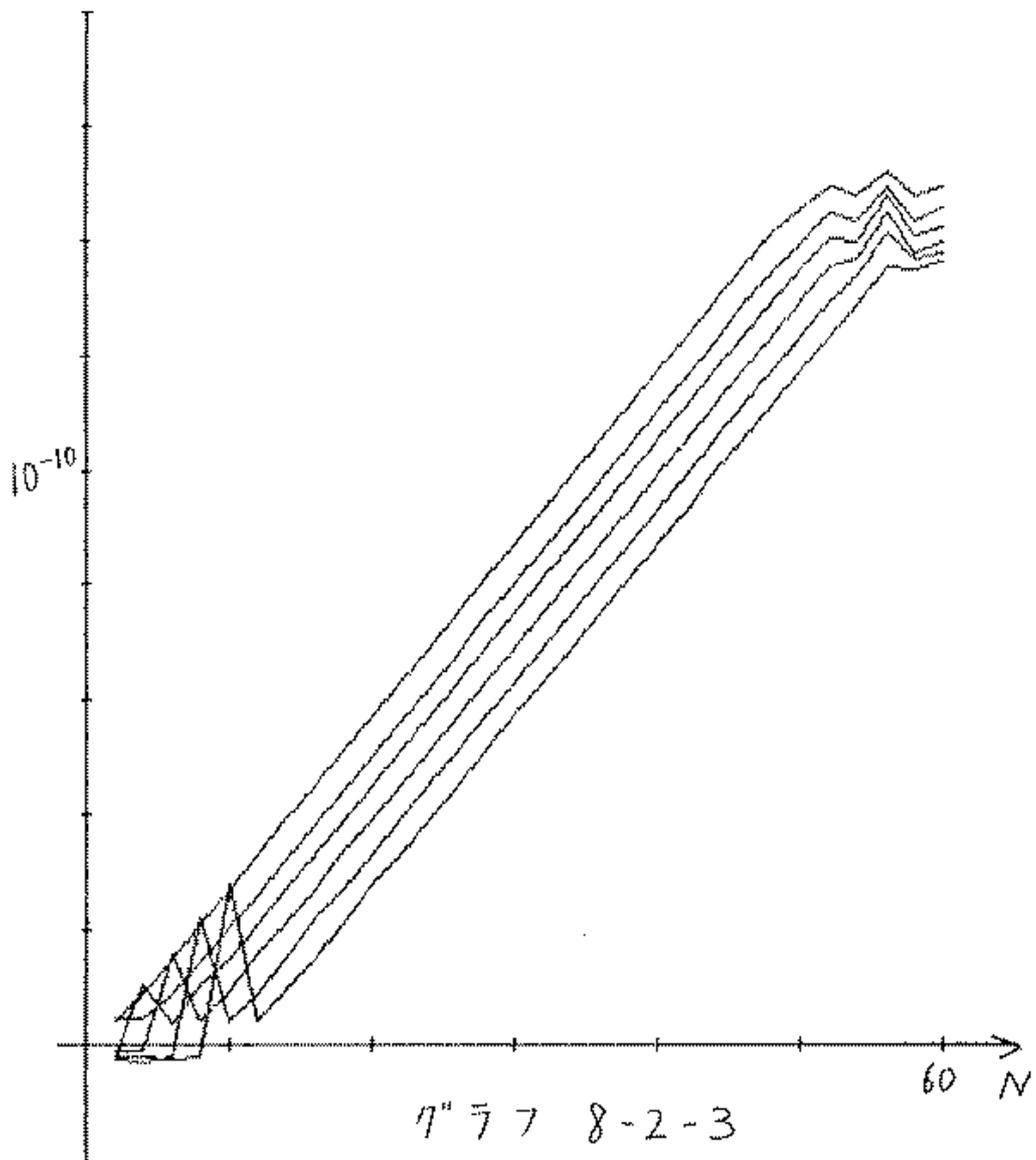
電荷を隔く円筒の半径 $R = 2.00000000000000000000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.

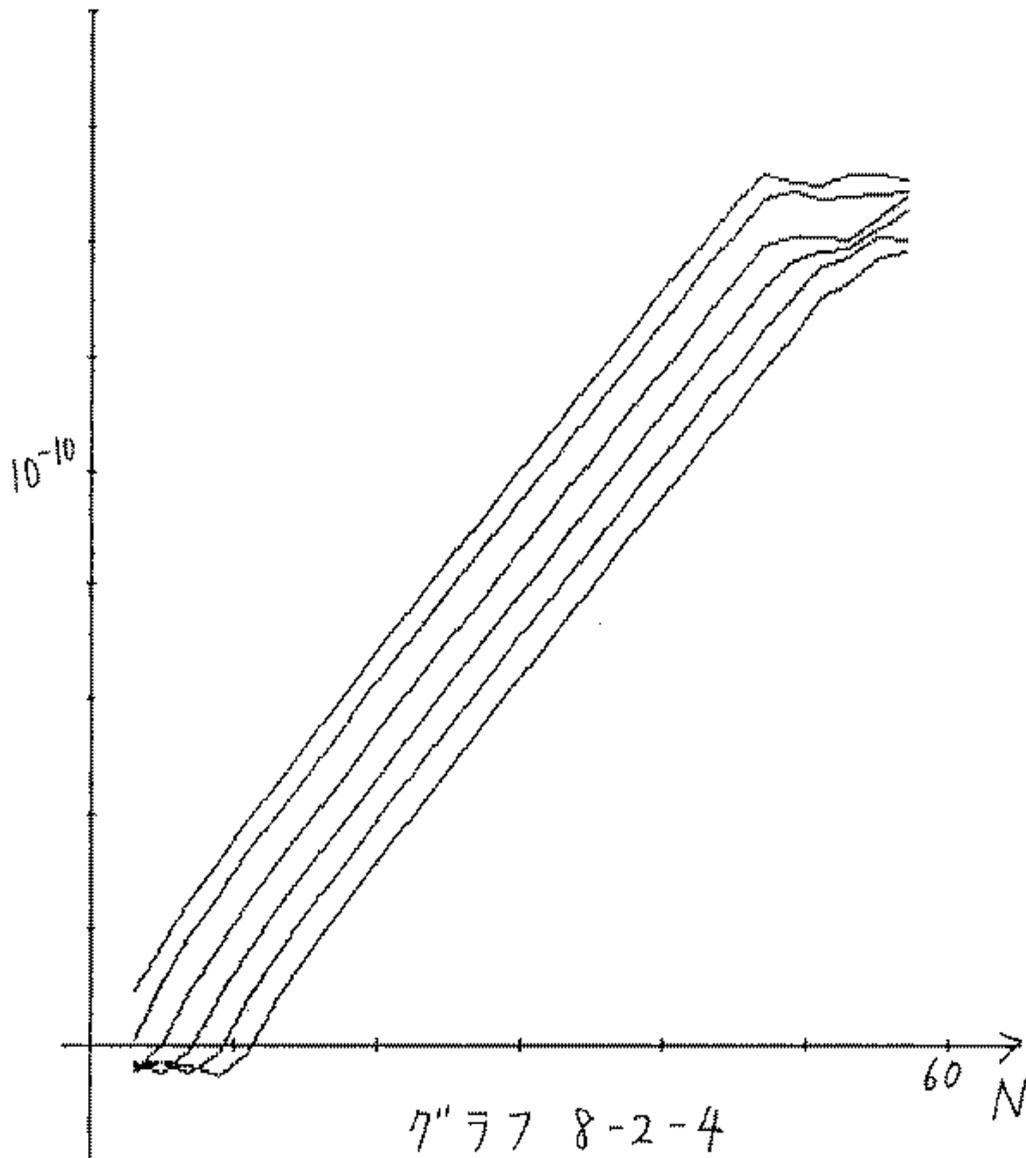


次の電荷個数に対して計算した。

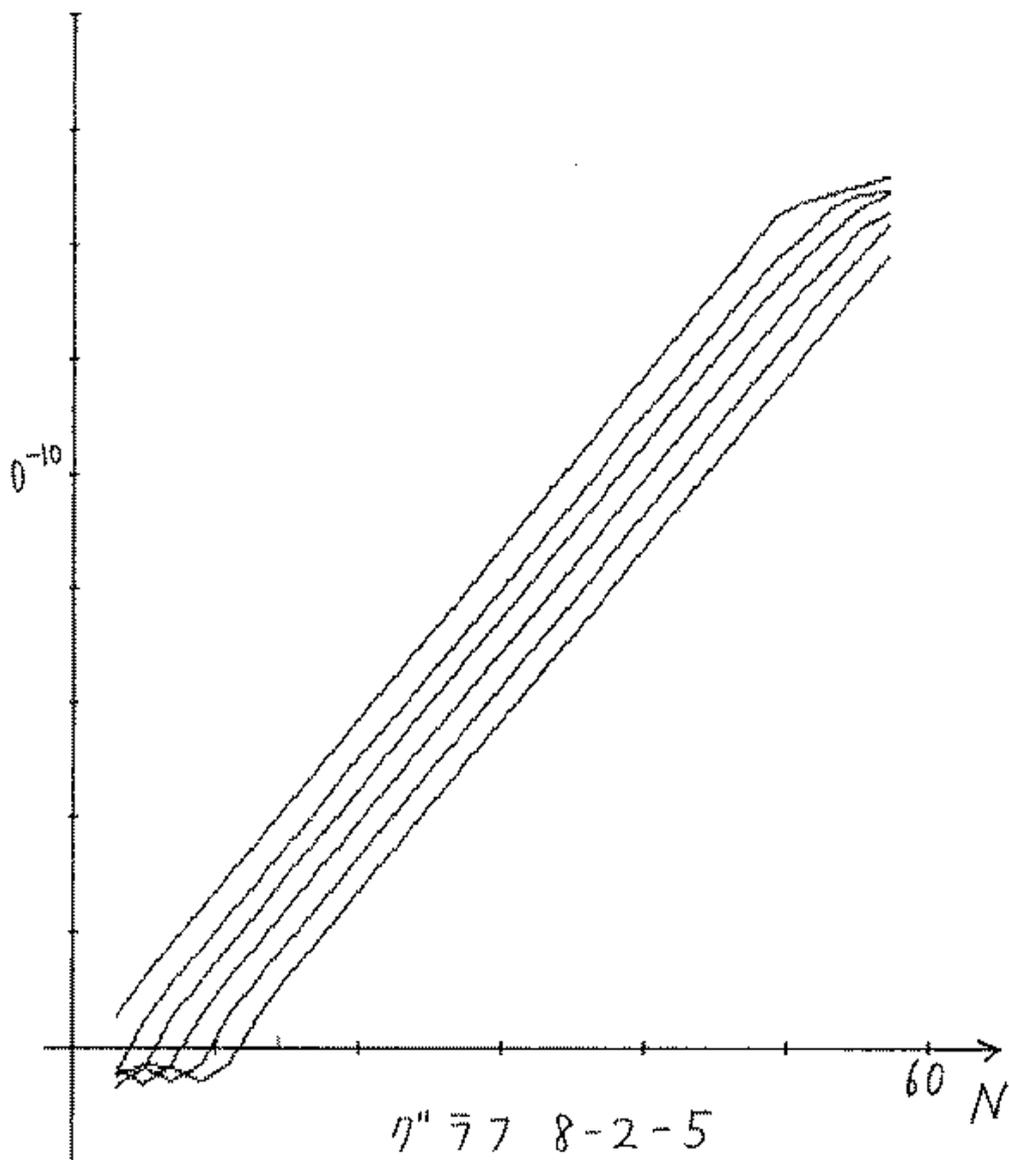
3 5 7 9 11 ... 57.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



千鳥形配置 Dipole simulation
 円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$
 電荷を置く円周の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$
 次の電荷個数に対して計算した。
 3 5 7 9 11 ... 57.
 次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算
 0 1 2 3 4 5.



Charge simulation

円板の半径 $\rho = 1.000000000000000E+000$

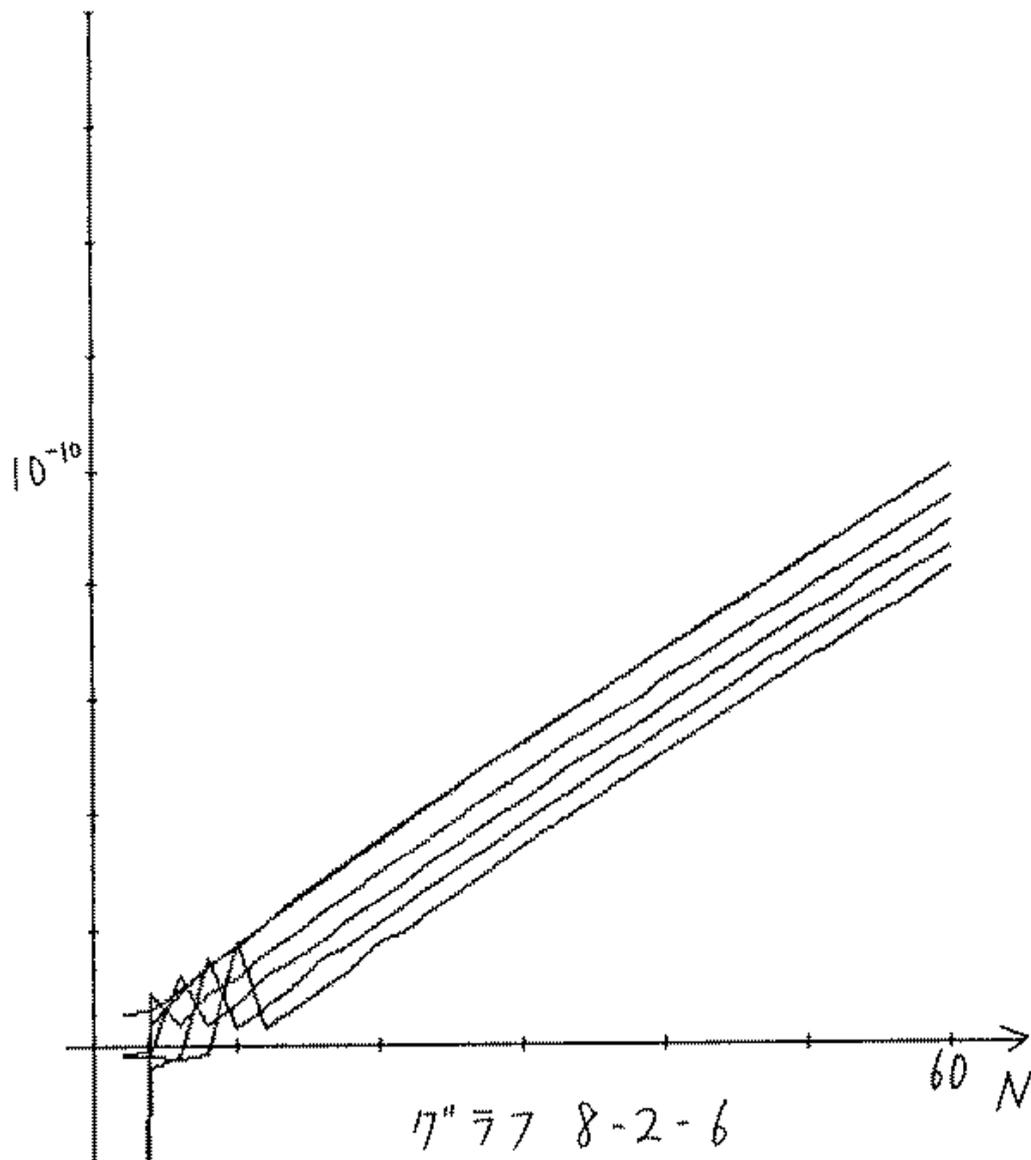
電荷を置く円周の半径 $R = 1.41421356237309E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m\theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



Charge simulation

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

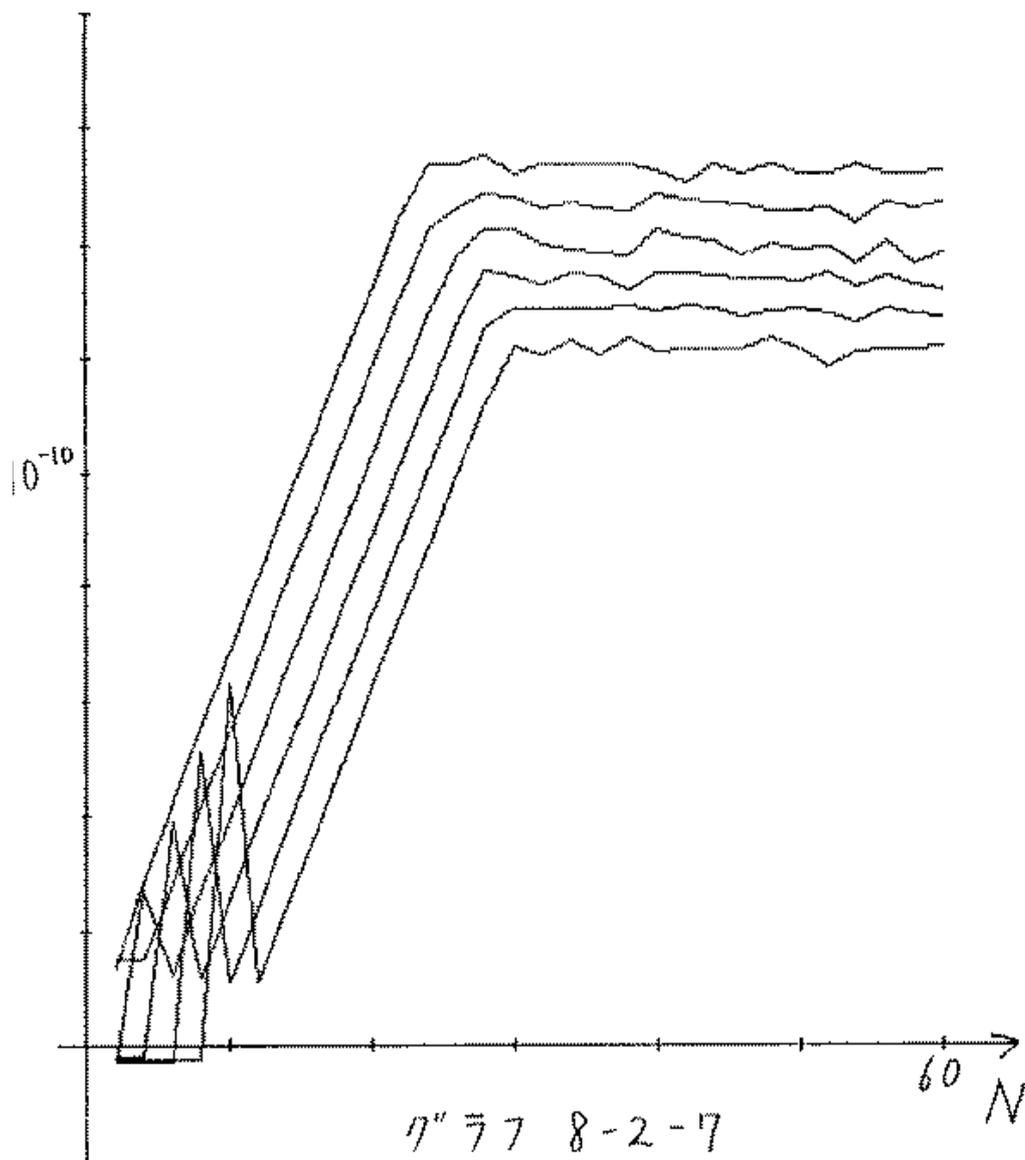
電荷を置く円筒の半径 $R = 4.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



Charge simulation

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

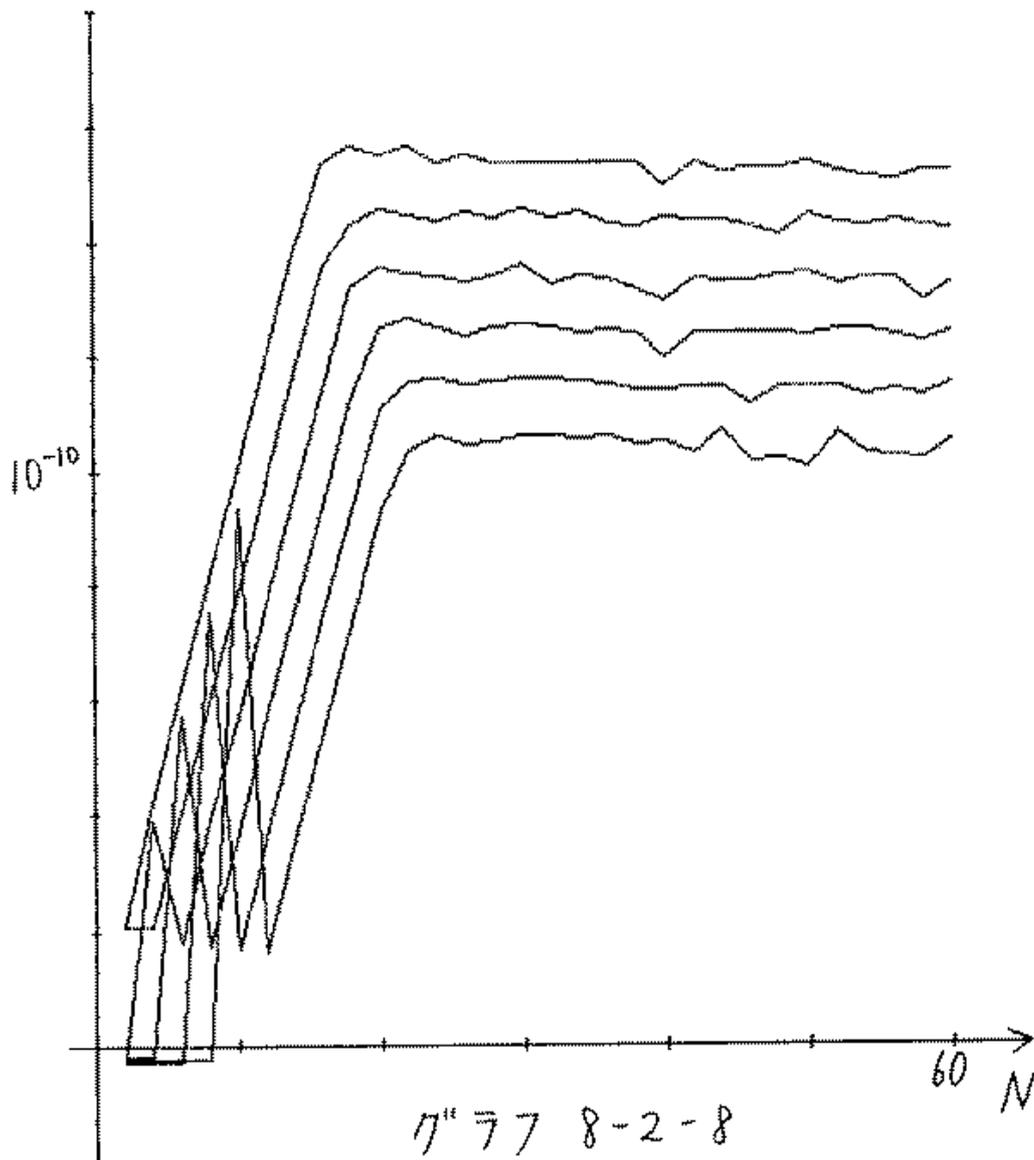
電荷を置く円筒の半径 $R = 8.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

次の振動数 m に対して、 $\rho^m * \cos(m \theta)$ を境界値として計算

0 1 2 3 4 5.



Charge simulation

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

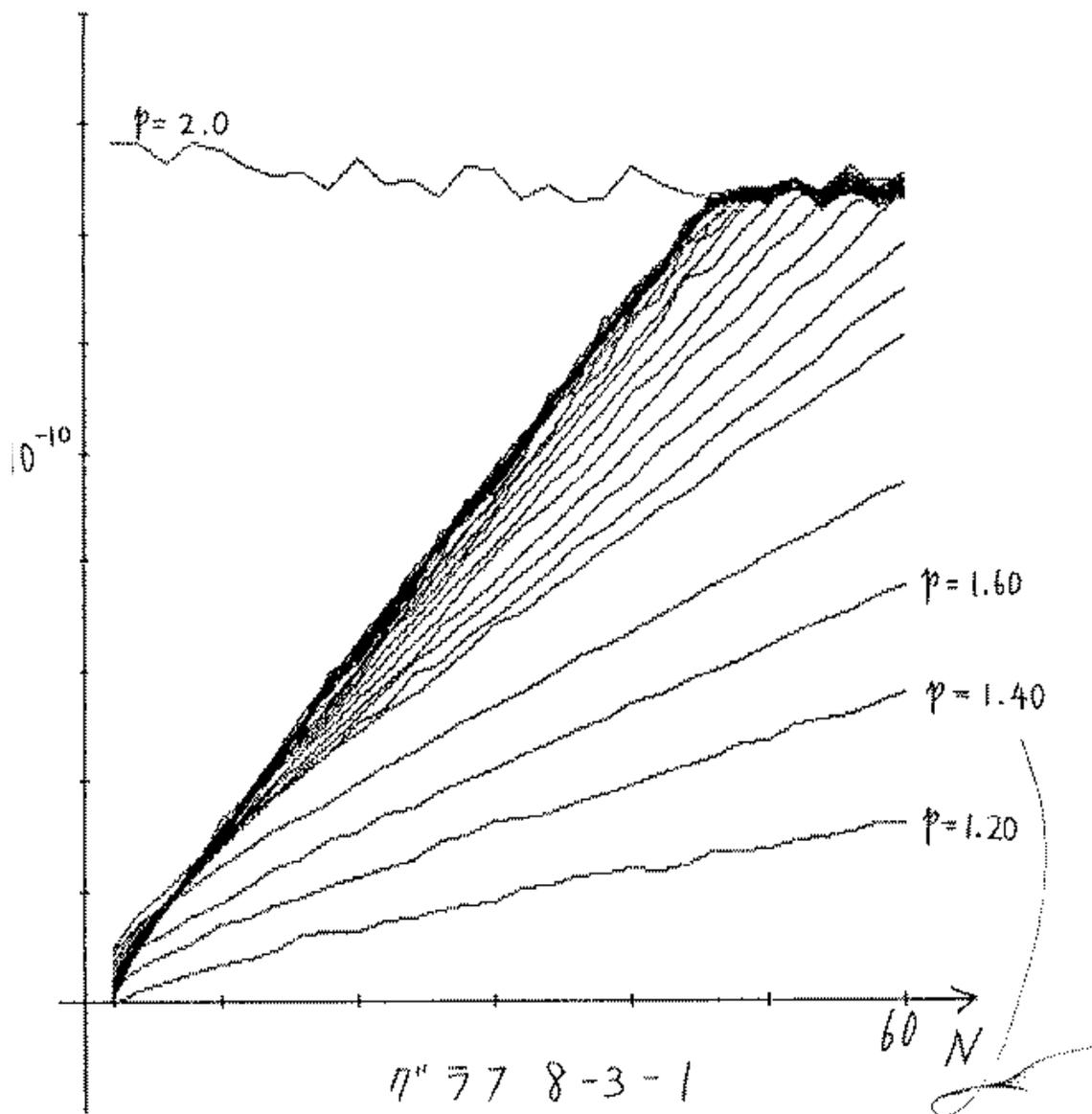
電荷を置く円周の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

2 4 6 8 10 ... 60.

以下の極の位置 p に対して、 $\log |x - p|$ を境界値として計算した。

1.200 1.400 1.600 1.800 2.000 ... 7.000.



Dipole simulation

円板の半径 $\rho = 1.0000000000000000E+000$

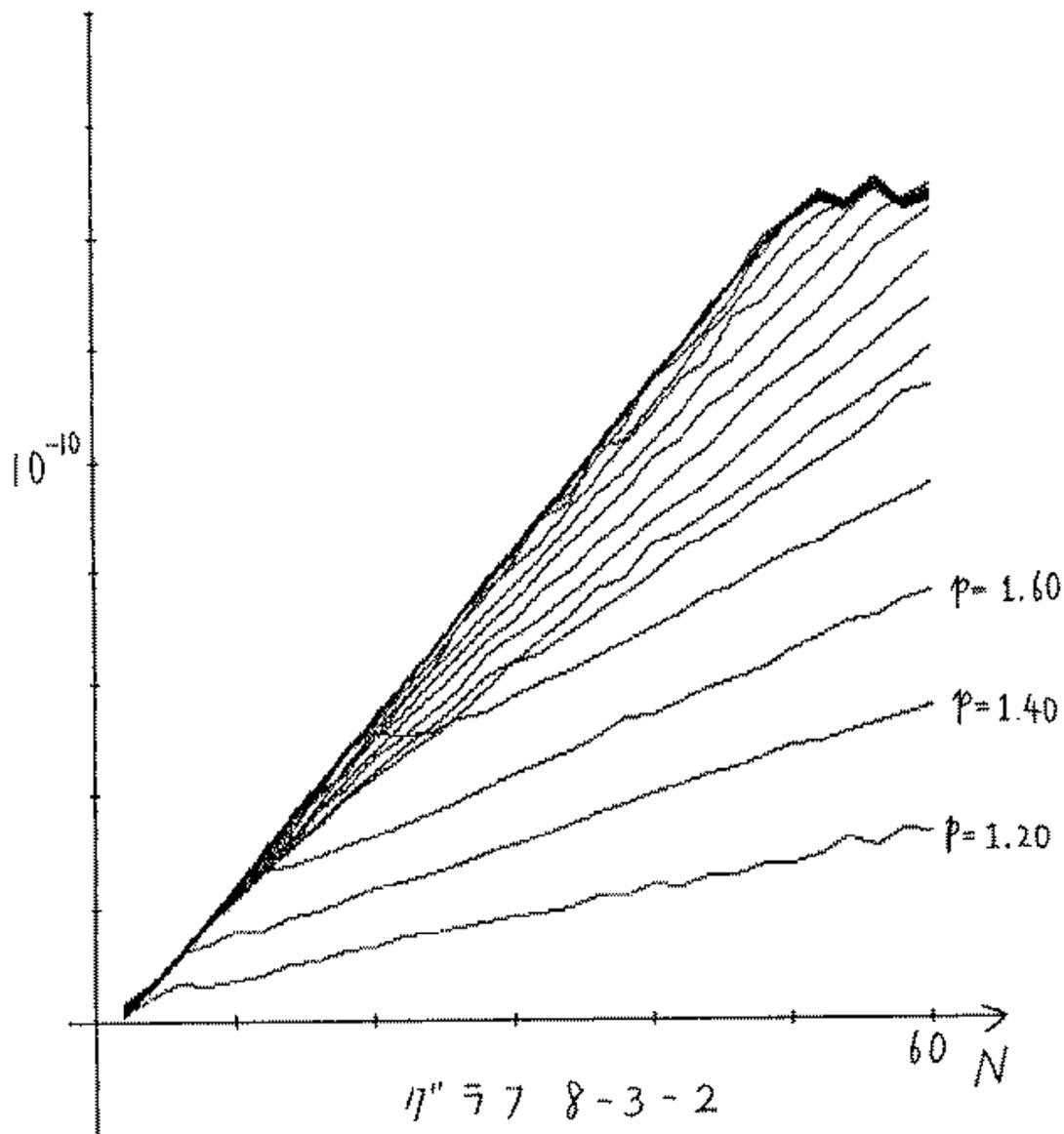
電荷を置く円盤の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$

次の電荷個数に対して計算した。

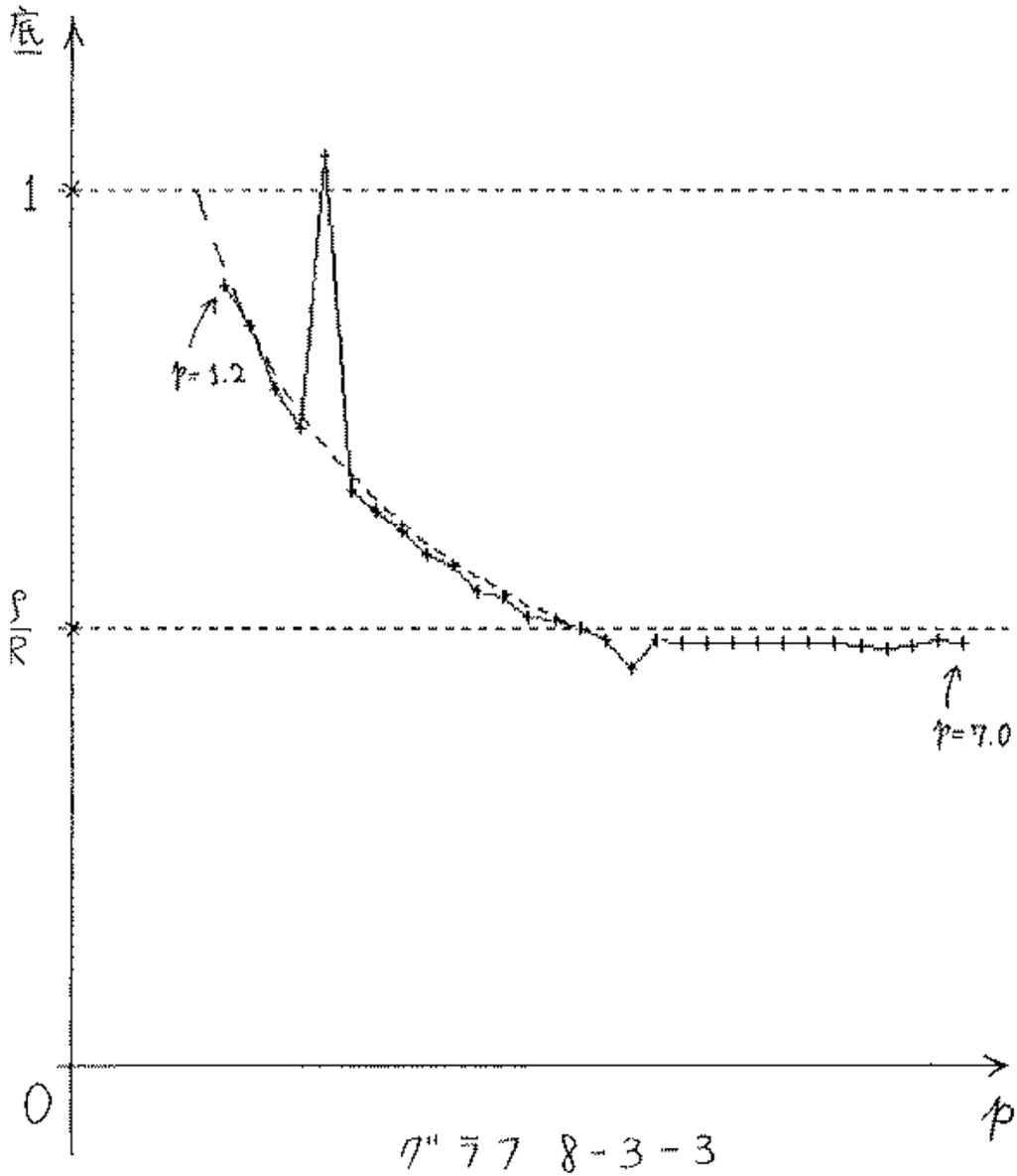
2 4 6 8 10 ... 60.

以下の極の位置 p に対して、 $\log |x - p|$ を境界値として計算し /

1.200 1.400 1.600 1.800 2.000 ... 7.000.



電荷を置く円筒の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$
 $\log |x - p|$ を境界値として計算
 極 p の位置は..
 1.200 1.400 1.600 1.800 2.000... 7.000



電荷を置く円筒の半径 $R = 2.0000000000000000E+000$
 $\log |x - p|$ を境界値として計算
 種 p の位置は...
 1.200 1.400 1.600 1.800 2.000... 7.000

