情報処理 2 第 5 回

十進BASIC (3) 円周率の計算

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2006 年 5 月 24 日

ホームページは http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2006/

数学と縁を持ったのならば、一生に一回くらいは、円周率の計算について学んでみるのが良いと思っています。幸い十進 BASIC を使うと、かなり簡単に古人の試みを目の前のコンピューターで再現することができます。

1 連絡事項

- 本日 10 時の段階で、前回の課題 3A (出席証明 ") はほぼ全員提出、課題 3B は半分くらい提出という状況です。今日中に課題 3B について質問すべきは質問して、5 月 30 日までにほぼ全員提出となると良いですね。

2 テイラー展開の計算による円周率計算

2.1 テイラー展開

関数 f が点 a の近傍で**解析的**であれば、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

が成り立つ (明治大学理工学部数学科学生にとっては、部分的には基礎数学 IV, 詳しくは複素関数論で学ぶ)。

これを関数値 $f(x)$ の計算に用いることがあります。具体的には十分大きな n に対して、n 項までの部分和

$$s_n(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を計算し、それを $f(x)$ の近似値に採用するわけです。

2.2 まずは簡単な e の計算

自然対数の底 (Euler の数, Napier の数とも言う) e の計算で実践してみましょう。

e は $e^x = \exp x$ の $x=1$ における値なので、

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

に $x=1$ を代入して

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

これを例えば 10 項まで足すと

$$\sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!} = \textcolor{red}{2.7182818}011\cdots \quad \text{(赤字の位は正しい)}$$

と (実は小数点以下第 7 位まで正しい) e の近似値が得られます。

さて、それでこの計算をどう実行するか。和の計算は前回やりました。

復習: 和 $\sum_{j=1}^{n} a_j$ の計算の定跡

```
s=0
for j=1 to n
  s=s+(a_j を計算する式)
next j
```

これを参考に、一般項 $a_j = \dfrac{1}{j!}$ が漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{a_{j-1}}{j}$$

で与えられることを利用すると、次のコードが得られます。

$s_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ を $n=10$ として計算

```
REM 自然対数の底をテイラー級数で計算
n=10
REM a0, s0
LET a=1
LET s=a
for j=1 to n
  LET a=a/j
  LET s=s+a
next j
print s
end
```

2.3 課題 4A (本日の出席証明)

特に理由がない限り、今日中に提出して下さい。

Subject (表題) は「レポート課題 4A」とします。

e の値を小数点以下第 100 位まで正確に求めて下さい (数学的に厳密でなくても構いません)。その結果がなぜそこまで正しいと判断したか理由も書いて下さい。

2.4 $\arctan x$ のテイラー級数で π を計算しよう

円周率 π は例えば

$$\pi = 4\arctan 1 \quad (\text{マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数}),$$
$$\pi = 6\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{シャープの級数})$$

のように arctan を計算することで求められます。

テイラー級数の計算では、級数の一般項の計算に漸化式を用いるのが便利です。

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}x^{2j-1}$$

については、

$$a_j = \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}x^{2j-1}$$

そのものの漸化式はあまり計算に便利ではありませんが、

$$t_j = (-1)^{j-1}x^{2j-1}$$

とおくと、t_j は簡単な漸化式

$$t_1 = x, \quad t_j = -x^2 t_{j-1}$$

を用いて計算でき、a_j は

$$a_j = \frac{t_j}{2j-1}$$

で計算できます。そこで次のようなプログラムを得られます。

piarctan.bas

```
rem piarctan.bas --- マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数でπを計算
rem arctan x の級数を第 n 項まで計算
input x
input n
f=-x*x
t=x
s=0
for j=1 to n
 a=t/(2*j-1)
 s=s+a
 t=f*t
next j
print "arctan(x)  ";s
print "その4倍";4*s
print using "πとの差=-%.###^^^^^^";4*s-pi
end
```

これを用いて $4\arctan 1 = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)$ という級数を第 n 項まで計算すると、次のような結果が得られます。

n	$4s_n$
10	$3.04183961\cdots$
100	$3.13159290\cdots$
1000	3.1405926538

$\pi = 3.14159265358979323846\cdots$ との一致具合いはどうでしょうか？不思議なことに気付いた人、もしその理由が分かったら、レポートを書いて送って下さい。

2.5 課題4B

Subject は「レポート課題4B」。現在締め切りは6月6日と考えています。

付録にある公式のどれかを使って円周率を最低100桁計算して下さい (ちなみにサンプル・プログラムで100桁計算するのは無理です)。

arctan 型の公式を使えば上のプログラム例がたたき台となるでしょう。

AGM 公式を使うのは案外簡単かもしれません。

3　円周率の計算の歴史

3.1　円周率の概念

3.1.1　円周率の定義

数学科の学生であるから「円周率って何？」と訊かれたら定義を言えるようになって欲しいですね。日本語の場合は言葉の字面からも示唆されるように、普通は

$$\text{円周率} = \frac{\text{円の周の長さ}}{\text{円の直径の長さ}}$$

で定義されます (本当はその前 (後?) に任意の円について、この値が一致することを確認する必要がありますね)。

西洋数学には、実は「円周率」という言葉はないのだそうです。ただギリシャ文字のアルファベットの一つである π で表すことが習慣になっているだけです。

3.1.2　円の面積、球の表面積・体積

円周と直径の比として定義されたので、

「半径 r の円の円周は $2\pi r$」

は当たり前ですが、

「半径 r の円の面積は πr^2」

は、全然当たり前ではありません。事実そのものは早くから知られていたと思われますが、証明をしたのはアルキメデスと言われています[1](ちなみにアルキメデスは、球の表面積 $4\pi r^2$ と体積 $4\pi r^3/3$ を発見し、そのことを証明したことで非常に名高い)。

余談になりますが、円周、円の面積、球の表面積、球の体積のいずれにも π が (π^2, π^3 でなく) 生で現れるのは不思議と言えば不思議です (2 年生は一般の n 次元球の「体積」や「表面積」を学ぶ機会がありますが、そのときにどうなるか目を凝らして見て下さい)。

3.1.3　無理数性・超越性

古代ギリシャの時代から、円周率は無理数ではないかと想像されていたと思いますが、実際に「円周率は無理数である」ことを証明したのは、ハインリッヒ・ランベルト (Johann Heinrich

[1]有名なユークリッドの原論には、円の面積は r^2 に比例すると解釈される定理が載っていますが、πr^2 とは言い切っていません。論証数学として面積・体積を堂々と取り扱ったのはアルキメデスが最初です。例えば円錐や角錐の体積が「底面積×高さ÷ 3」であることを発見したのは、原子論で有名なデモクリトスで、証明したのはアルキメデスです。アルキメデスはまた放物線の囲む面積を求めることにも成功しています。図形の重心の決定など、今だったら積分を使って計算するようなことを、微積分のない時代に実行したのは、まさに時代を越えた天才と言えるでしょう。

Lambert, 1728–1777, Mülhausen (Mulhouse, 現在のフランス) に生まれ、Berlin にて没する, 物理・数学・地図投影法に業績がある) です (1761 年)。彼は連分数展開

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

を用いて、「x が 0 以外の有理数ならば $\tan x$ も無理数である」ことを証明しました (π が無理数であることはこの定理の簡単な系です)。

代数学を学ぶと、**超越数**という概念を学びます。「円周率は超越数」です (要するに整数係数の多項式の零点にはならない)。これを証明したのは、リンデマン (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939, 巨人 Hilbert の師匠としても有名[2]) という人でした (1822 年)。

3.1.4　何桁くらい分かればよいか？

この話は省略したいくらいなのですが、どうも頓珍漢なことをいう人もいるので念のため。
小学校の算数で丸いものの直径と周囲を測らされることがありますが、それによると 3.1 と 3.2 の間くらいであることは何とか分かりますが、その一つ下の 3.14 を出す ($3.14 < \pi < 3.15$) のは大変というか、よほどの工夫をしない限り無理です。

…ということは算数の話題であって、よく分かっていると信じていたのですが、世の中にはどうも「数学で難しい計算をしなくても、実際に円を描いて測れば良いではないか？」と考えている人がいるみたいです (私の勘違いでしょうか)。

その方法では精度をあげるのはとても大変です。逆に言うと、現実世界の工学的問題を相手にする限り、円周率の桁数はそんなにたくさんは必要ないということです (10 桁の精度の工作は難しいのではないですか、職人がミクロン・オーダーの加工をすると言っても)。
問: 宇宙の直径 (100 億光年のオーダー) の円の円周を原子の大きさ (オングストロームくらいでしょうか？) の精度で求めるには、円周率が何桁まで分かればよいか。

一方で、3.14 もあれば十分だと発言する人がいたりするのも困ります (テレビで某数学者がそんなことを言っていました…)。何でもかんでも 3 桁の精度で済むはずはないでしょう。1m のものを作るのに 1mm の誤差は、日曜大工ならば全然オッケーかもしれませんが、許されないこともあるのは分かるでしょう。

3.2　円周率の計算法の変遷

3.2.1　円に接する正多角形の周長を用いる方法

円周の長さや円の面積をどう求めるか、古くから色々な方法が知られていましたが、何分無理数であるので、完全なやり方ではないわけです。アルキメデスによって、すべての問題は円周率の値を決定することにはっきりと帰着されました。当然彼は円周率の値を調べることに

[2] 何でも 60 人の博士を出したとか。

なります。彼は論文「円の計測」のなかで、円に内接する正多角形の周長と概説する正多角形の周長を用いて、円周率の下からの評価と上からの評価を得るというアイディアを提出しました。

これについては挑戦課題 3C を出してあります (これは `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2006/jouhousyori2-2006-04/node8.html` に置いてあります。)。その課題の文章を見てもらえれば分かりますが、四則と平方根の計算だけを使って、正 96 角形の周長の計算を行い、それにもとづき

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

を証明したということです。

ところでこの正多角形の周長から円周率の近似値を求める方法は、これ以降 1000 年以上、人類が知るほとんど唯一の方法でした (中国、ペルシャ、色々な場所、色々な時代に計算に挑戦する人が現れました)。

ドイツの Ludolph van Ceulen (1540–1610, ドイツの Hildesheim に生まれ、オランダの Leiden にて没する) が内接正 2^{62} 角形の周長で 35 桁の値を計算した (1596 年) というのが、有名です。

3.2.2 逆三角関数のテイラー展開を用いる方法

円周率を逆三角関数の値を元にして表現し、逆三角関数をテイラー展開で計算するという公式が現れました。有名なものは、「グレゴリー級数」または「ライプニッツ級数」とも呼ばれる

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{1}$$

です。これは

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (|x| < 1) \tag{2}$$

を基礎としているわけですね[3]。

この (2) は、現在の数学のカリキュラムでは、微積分を用いて、いわゆる Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

として理解するのが普通ですが、驚いたことに微積分がなかった 1400 年頃のインドで発見されていた (発見者はマーダヴァという名前だとか) ことが分かっています。

[3]細かいことを言うと、$x = 1$ が式に代入できることの検証はあまり簡単ではありません。自力でレポートが書けたらそれだけで単位を出してもよいくらい。

余談

arctan の計算には

$$\arctan x = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^2 + \cdots\right), \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

も使われた (L. Euler が使ったのが有名)。
また Newton が発見した

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

も利用できる。
なお $\arcsin^2$ の展開

$$(\arcsin x)^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!2^n)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

は Euler の 1737 年の発見ということになっているが、建部賢弘（たけべかたひろ）の 1722 年の綴術算経（てつじゅつさんけい）に載っている。

実は (1) は、収束が遅すぎて (項数を非常に大きく取らないと良い近似値が得られない) 実用的ではありませんが、

もっと小さな x の arctan を用いるとずっと実用的

になります。

挑戦者達

Abraham Sharp (1651–1742)

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

John Machin (1680–1752, ロンドン大学天文学教授) は 1706 年に

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

を用いて 100 桁の値を計算した。以後この公式は多くの人達に採用されることになる。
William Shanks (1812–1882) が 707 桁計算したのが有名 (567 桁までが正しかった)。

L.Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの Petersburg に没する) は 1737 年に以下の公式を得た。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}, \quad \pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}.$$

Charles Huttion (1737-1823) は 1776 年に次の結果を得た。

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \\ &= 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{5}{99}.\end{aligned}$$

有名な C.F.Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) は、

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{38} + 20\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 24\arctan\frac{1}{268}$$

を発見した (1863 年)。また 9 項からなる公式

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 2805\arctan\frac{1}{5257} - 398\arctan\frac{1}{9466} + 1950\arctan\frac{1}{12943} + 1850\arctan\frac{1}{34208} \\ &\quad + 2021\arctan\frac{1}{44179} + 2097\arctan\frac{1}{85353} + 1484\arctan\frac{1}{114669} + 1389\arctan\frac{1}{330182} + 808\arctan\frac{1}{4852}\end{aligned}$$

も得ていたとか (ちょっと唖然としますね — もっとも並列計算でもしないと速くなりませんが)。(この公式、誤植がありました。2006 年 5 月 30 日修正しました。)
1896 年に F.C.M. Störmer が得た次の公式は、金田・後の世界記録 (2002) の検証計算にも使われたもので、高い効率を実現します[a]。

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}.$$

[a] 高野公式の計算時間が 400h, Störmer 公式の計算時間が 157h だったそうです。

2006 年現在の円周率計算の世界記録は、金田 康正, 後(うしろ) 保範(やすのり)等のグループによるもので、

2002 年に 1 兆 2400 億桁計算したというものですが、そこでは、高野喜久雄[4]氏による公式 (1982)

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

を用いたそうです (`http://www.asahi-net.or.jp/~yp5k-tkn/`, 共立出版の bit 1983 年 4 月号への寄稿に公式発見のいきさつが書いてあります)。

3.3 AGM (算術幾何平均) を用いる方法

(準備中 — この項書きかけ)

1976 年、π の計算法の歴史の新しい 1 ページが開かれた。

E.Salamin と R.P.Brent により独立に次の手順が「発掘」された。

Salamin-Brent のアルゴリズム(別名 Gauss–Legendre のアルゴリズム)

$a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ として、

$$\begin{cases} a_0 := a, \quad b_0 := b, \\ a_{n+1} := \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \\ c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{3}$$

で定義された数列を用いて

$$\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2}$$

とおくとき、

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi \quad (\text{単調増加}).$$

これは無限級数でなく、漸化式で定義された数列の極限として π をとらえているわけだが、いわゆる 2 次の収束 (4) をするので非常に速く高精度の値が得られる。収束の速さに関しては

$$\pi - \pi_{n+1} \le \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2}(\pi - \pi_n)^2 \quad (\text{二次収束}), \tag{4}$$

$$\pi - \pi_n \le \pi^2 2^{n+4} e^{-\pi\cdot 2^{n+1}}.$$

計算法の背景

(細かい話になるけれど、一応書いておく。)

「発掘」された方法の基礎となっているのは、19 世紀数学の華とも呼ばれる楕円関数論からの次の二つの事実である。

[4]高野喜久雄 (1927–2006, 佐渡に生まれ、鎌倉にて没する) は詩人で、合唱曲の作詞などでも知られている。まだ WWW ページ (`http://www.asahi-net.or.jp/~yp5k-tkn/`) が残っている？

(i) 第一種完全楕円積分

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (0 \le k < 1)$$

と第二種完全楕円積分

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad (0 \le k \le)$$

の間に成り立つ **Legendre**(ルジャンドル) **の関係式** (Legendre's relation) と呼ばれる

(5) $$K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ただし } k' := \sqrt{1-k^2})$$

という式の、特に $k = 1/\sqrt{2}$ の場合の

(6) $$2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) $K(k)$, $E(k)$ はいわゆる**算術幾何平均**(arithmetic geometric mean, AGM) アルゴリズムで計算できる。第一種完全楕円積分、第二種完全楕円積分の二変数版 $I(a,b)$, $J(a,b)$ を

$$I(a,b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \quad J(a,b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

で定めるとき、

$$I(a,b)M(a,b) = \frac{\pi}{2}, \quad J(a,b) = \left(a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a,b)$$

が成り立つ。ここで $M(a,b)$ は a, b の算術幾何平均と呼ばれる量で、(3) で定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限として定義される:

$$M(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

また数列 $\{c_n\}$ は

$$c_n := \sqrt{|a_n^2 - b_n^2|}$$

で定義される。容易に

$$K(k) = I(1,k'), \quad E(k) = J(1,k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

であることが分かるので、

(7) $$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,1/\sqrt{2})}, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right)\frac{1}{M(1,1/\sqrt{2})}.$$

(7) を (6) に代入して整理すると

$$\pi = \frac{2M\left(1, 1/\sqrt{2}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

ここで述べたことはすべて 19 世紀の段階で分かっていたわけであるが、π の計算法として、このアルゴリズムが 1976 年という時点で初めて注目 (「発掘」) されるようになった理由は、この方法が最初から長い桁の数の掛け算、平方根を必要とするため、arctan の級数展開を利用する方法と比べて不利だと考えられたせいであろう。1971 年の Strassen と Schönhage による**高速乗算法**(これは**高速 Fourier 変換**に基づいている) の発見により、その立場が逆転してしまった。二つの n 桁の数の積の計算が $O(n^2)$ ではなく、$O(n \log n)$ 程度の計算量で実行可能というのは発見当時は驚くべきことだったと思われる。

3.4 現在の到達点

3.4.1 ラマヌジャン型公式

(書きかけ)

Chudonovsky の公式 (現在最高速？)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{n=0}^{p} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(6k-5)(6k-1)}{9k^3 106720^3} \right) (-1)^n (545140134n + 13591409).$$

また次の公式も良く知られている。

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{p} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(4k-3)(4k-1)}{2k^3 198^4} \right) (26390n + 1103).$$

3.4.2 DRM の発見、そして…

AGM 法が発見されてしばらくは AGM 法の効率がダントツに高かったが、最近になって、後(うしろ)保範氏によって考案された **DRM** (分割有理数化法) によって、arctan 公式や Ramanujan 型公式に現れるような級数の和を効率的に計算できるようになった。arctan 公式, AGM, Ramanujan 型公式のいずれも $O(n(\log n)^p)$ $(p = 2, 3)$ の計算量で計算できることになり、あまり差がなくなったということである。

> 『分割有理数化法 (DRM) による多数桁関数値計算と円周率計算の世界記録』, 後保範 (2005 年 1 月 25 日, 3 月 3 日)
> `http://www.hucc.hokudai.ac.jp/pdf/Ushiro/20050224gijyutsu/paper4/paper4.pdf`

むしろ、2006 年 5 月現在の世界記録は、2002 年に有名な金田氏と後氏等のグループによって、arctan 公式を用いて達成されたものであるので、arctan 公式が抜き返したと言ってもよいかもしれない。

次はどうなるのだろう…Ramanujan 型公式だろうか？