情報処理2 第4回

十進BASIC (2) 繰り返しの計算

桂田(かつらだ) 祐史(まさし)

2006年5月17日

ホームページは http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2006/

今日は、コンピューターによる計算で最も大事な要素であると私が信じている「繰り返しのある計算」のプログラミングを取り上げます。同様のことを C 言語のプログラムでやった人も多いはずですが、気持ちを新たに「これくらいは自力で出来るようになってやる」と考えてチャレンジしてください。

1 連絡事項

- 前回の課題2は一応 OK ですが、一人だけ実行結果だけ送ってプログラムを送らなかった人がいました。プログラムのファイル名は普通は “なんとか.bas” です。間違えないように。
- 次回は円周率の計算を取り上げる予定。

2 FOR 〜 NEXT による繰り返し

コンピューターが最もその能力を発揮するのは、**繰り返し計算**をしているときだと私は信じています。人間が書く短いプログラムで大規模な計算をするのは、プログラムのどこかで繰り返し処理があるからでしょう。

ここでは数学の問題を繰り返し処理を用いて解くプログラムを考えましょう。すべてとはいいませんが、かなりの部分は**漸化式**による計算です。

2.1 FOR NEXT 構文の復習

十進 BASIC には繰り返しを記述するための命令が色々ありますが、多分 FOR NEXT 構文が一番よく使うでしょう。

nenbutsu.bas

```
REM 単純な繰り返し
FOR n=1 to 100
  print "南無阿弥陀仏"
NEXT n
END
```

2.2 簡単な漸化式

例題 1. 定数 r が与えられたとき、漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_n = r a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の最初の 100 項を求めよ。— 要するに等比数列 $a_n = r^{n-1}$ ですが、この仕事を要求するには、例えば次のようなプログラムを書けば OK です。

配列を使うバージョン touhi1.bas

```
REM 等比数列 (配列を使うバージョン)
DIM A(100)
INPUT PROMPT "r=": r
A(1)=1
FOR n=2 to 100
  A(n)=r*A(n-1)
  print n;A(n)
NEXT n
END
```

演算精度を上げておくべきかもしれない。これはボタンを押しても実現できるが、プログラムの先頭部分に

```
  OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
```

と書いてもよい。

実は一度 `A(n-1)` として使われた後はもう使われなくなるので、次のようなプログラムで済ませることが出来ます。

配列を使わないバージョン touhi2.bas

```
REM 等比数列 (配列を使わないバージョン)
INPUT PROMPT "r=": r
A=1
FOR n=2 to 100
  A=r*A
  print n;A
NEXT n
END
```

2.3 課題 3A

フィボナッチ数列は、漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

で定義されるが、この最初の 100 項を求めよ。配列を使ったプログラムを書いて、その結果と一緒にレポートしなさい (必修)。もしできれば配列を使わないプログラムも作成しなさい。これは出席がわりで今日中にレポートを送ること。その代り TEX 文書化しなくてもよい。

もう一度だけ注意しておくと (以後繰り返さない)、宛先は `syori2@math.meiji.ac.jp`, Subject (表題) は「レポート課題 3A」, 本文先頭に学年・組・番号・氏名を明記。

2.4 和 $\sum$ の計算

一見漸化式と関係なさそうでも、漸化式を用いて計算すると便利というものが結構あります。例えば数列 $\{a_j\}$ の和 $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ は、部分和

$$s_j := \sum_{k=1}^{j} a_k$$

を導入すると、数列 $\{s_j\}$ の第 n 項である、すなわち $s = s_n$ ですが、$\{s_j\}$ は

$$s_1 = a_1, \quad s_j = s_{j-1} + a_j \quad (j \geq 2)$$

あるいは

$$s_0 = 0, \quad s_j = s_{j-1} + a_j \quad (j \geq 1)$$

という漸化式で定義することができます。例えば

```
s=0
for j=1 to n
  s=s+(a_j を計算する式)
next j
print s
```

のようなコードで計算できます。

2.5 課題 3B

自然数 n が与えられときに

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}, \quad t_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

を計算するプログラムを書き、$n = 1, 10, 100, 1000, \ldots$ のとき[1]、値がどうなるか調べ (記録を取ること)、説明せよ。なお、$n \to \infty$ のとき s_n, t_n がどうなるか、よく知られたことでもある (収束・発散については基礎数学 IV で学んだはず)。それを知っているのならば、そのことを踏まえて結果を説明せよ。締め切りは 5 月 23 日とする予定だったが、少し延す。

工夫のヒント: 工夫すると、1 つのプログラムで複数の n の値に対する s_n, t_n の値を一気に計算することができる。そういうプログラムを提出してくれればなおよい。

2.6 挑戦課題 3C

これはレポートを提出するかどうか任意。締め切りはこの講義の最終回まで。

半径 1/2 の円の円周は円周率 π に等しい ($r = 1/2$ なので $2\pi r = 2\pi \cdot 1/2 = \pi$)。有名なシラクサのアルキメデス (BC287?〜BC212) は、内接正 n 角形の周の長さ p_n と、外接正 n 角形の周の長さ q_n を考え、

$$p_n < \pi < q_n, \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \pi$$

をもとにして、実際に $n = 6, 12, 24, 48, 96$ に対して p_n, q_n を計算して π の評価を得た。

アルキメデスは $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ について成り立つ漸化式 (?)

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}$$

を用いて計算したという (現代の数学を使えば $p_n = n\sin(\pi/n)$, $q_n = n\tan(\pi/n)$ と表される。これは sin, tan の計算には直接は役立たないが、漸化式が成立することの確認には役立つであろう。)。

$n = 3 \cdot 2^k$ の場合、すなわち内接・外接正 $3 \cdot 2^k$ 角形の周長をそれぞれ P_k, Q_k とおこう:

$$P_k := p_{3\cdot 2^k}, \quad Q_k := q_{3\cdot 2^k}.$$

このとき $\{P_k\}$, $\{Q_k\}$ について成り立つ漸化式を導き、

$$P_1 = p_3 = 3, \quad Q_1 = q_3 = 2\sqrt{3}$$

と合わせて用いて $\{P_k\}$, $\{Q_k\}$ を計算するプログラムを作成し、以下の (1), (2) に答えよ。

[1] n が大きくなると計算に時間がかかる。概算でよければ精度は無暗に高くしないことを進める。十進 BASIC の場合は 1000 桁演算モードでない、普通の演算モードで計算しよう。

(1) 正 96 角形 ($k = 5$ の場合) を利用すると、π のどのような評価が得られるか。

(2) ネットで検索すると、内接正多角形の周長で円周率の近似値を求めた話が色々見つかるはずである。それらの話を確認せよ (正 n 角形の周の長さを用いて小数点以下○○桁の値を求めたとあるが、本当にそれができるか)。