情報処理 II 第 10 回

数学のためのコンピューター (2)

Mathematica 体験 (2)

桂田 祐史

2005 年 6 月 30 日 (同日少し訂正)

ホームページは http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2005/

Mathematica の二回目は簡単なユーザー関数の利用法に慣れてもらいます。

1 連絡事項

- レポート課題 5[1] の締め切りは当初 7 月 6 日としていて、既に提出した人もちらほらいるのだが、Linux 環境でないと一部不便なところがあるかもしれない (本当はやりようだけど — 例えば Windows から TeraTerm で samba00 にリモート・ログインするとか…)。そこで次回の講義は Mathematica でなくて、Linux 上で C 言語のプログラムを用いて方程式を解く話にする。Linux 上で作業するのが必要なことがあれば、その際にすると良い (昼休み中しばらく教室を空けておくことにする)。そこで課題 5 の締め切りを 7 月 7 日 (木曜) とする

- ノートブックの使い方については、

  http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2005/mathematica/node10.html

  以降に加筆しておいた。レポート提出用のノートブックを作るには、例えば次のようにするとよい。

  1. 一通り計算した後で、File メニューから New を選んで新しいノートブックを開き、そちらに必要なコマンドを Copy, Paste して、再実行することで、必要なところだけを抜き出したノートブックを作る。
  2. File メニューから Save As を選び、マイドキュメントに適切な名前 ("syori20630" とか "課題 6" とか) で保存する。

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2005/jouhousyori2-2005-08/node13.html

2 簡単なユーザー関数の定義の仕方と応用例

2.1 関数定義

百聞は一見にしかず。$f(x) = x^2$ なる関数 f は、

```
f[x_] := x^2
```

で定義出来る。つまり、

関数を定義する文法

関数名 [引数名_] := 式

ということである。(また “f[名前_ 型名] := 式” のように型名を指定することも出来る。) 関数を再定義すると古い定義は消えてしまう。このように定義しておくと、以下のように使える (細かい説明は不要であろう)。

```
f[4]
f[a+1]
f[3x+x^2]
```

もちろん関数 “f” の定義が見たい場合は、“?f”, または “??f” とする。

多変数の関数も定義できる。

```
f[x_,y_] := (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)
```

2.2 例 1: 普通の関数らしい使い方

関数 $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 4x + 9$ の増減を調べよう。

```
f[x_]:=4x^3-8x^2-4x+9
Plot[f[x],{x,-4,4}]
Solve[f[x]==0,x]
N[%,20]
sp=Solve[f'[x]==0,x]
f[x] /. sp
Simplify[%]
Remove[f,sp]
```

(2 変数関数の増減を調べるのは研究課題としたい。http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2005/mathematica/ の付録にプログラム例がある)

2.3 例 2: 数列

うっかりする人がいるかもしれないが、数列というのは、変数が自然数 (あるいは整数) である関数である。

次の例では、

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

で定義される Fibonacci 数列を第 100 項まで表示して、さらに連続する 2 項の比を 50 個表示したものである。

```
a[n_]:=a[n]=a[n-1]+a[n-2]
a[0]=1;a[1]=1                          ここまで（2 行）が関数定義
a[10]                                  a[10] を計算して結果を表示
??a                                    a の中身を見る
Table[a[n],{n,100}]                    a[1],...,a[100] を表示
Do[Print[{n,a[n]},{n,0,100,10}]        a[0],a[10],a[20],...,a[100] を表示
Table[{n,N[a[n]/a[n-1],20]},{n,50}]    比を表示してみる
```

a[-1] を計算させようとすると、暴走することに注意 !!
万一暴走させた場合は、[Kernel] → [Abort Evaluation] で強制終了

2.4 例 3: 手続き風の使い方

Mathematica の文法的には「関数」ということになるが、返す値に直接興味を持たれない手続きとして利用することもある。

いわゆるリサージュ (Lissajous) 図形を描くために、関数を定義して、それを利用した例をあげる。

```
lis[m_,n_]:=ParametricPlot[{Cos[m t],Sin[n t]},{t,0,2Pi}]
lis[1,1]
lis[2,1]
lis[5,6]
```

もう一つ引数を増やすべきか？

```
lis2[m_,n_,ph_]:=ParametricPlot[{Cos[m t],Sin[n t+ph]},{t,0,2Pi}]
gr[3,4,Pi/2]
```

2.5 少し凝った例

(たまたま昨日のゼミで使ったので。)

arctan の Maclaurin 展開

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

を用いて円周率 π を表す色々な無限級数を作ることができる。

有名なのが $x = 1$ とおいてできるマーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数である:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \quad より \quad \pi = 4 \arctan 1 = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

これは印象的であるが、収束は極端に遅く、π を計算する目的にはまったく使い物にならない。

絶対値の小さい x を選ぶと実用的な公式が得られる。例えば $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}
\pi &= 6 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\sqrt{3}\right)^{2n+1}(2n+1)} = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n(2n+1)} \\
&= 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \cdots\right)
\end{aligned}$$

Abraham Sharp は 210 項まで足し合わせて、小数点以下 100 桁以上の円周率の値を求めたという。

$$s_n := 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(-3^k)(2k+1)}$$

とおき、s_n を計算する関数を作ってこのことを確かめよ。

```
s[n_]:=2\Sqrt[3]Sum[1/((-3)^k*(2k+1)),{k,0,n}]
s[210]
N[%,200]
%-Pi
ns[n_]:=N[s[n],1000]
match[n_]:=-1.0*Log[10,Abs[ns[n]-Pi]]
ListPlot[Table[match[n],{n,210}]]
```

L.Euler (超有名数学者) は次の公式を 1737 年に得た。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}, \quad \pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}.$$

John Machin (1680–1752, ロンドン大学天文学教授) は

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan 1239$$

を用いて 100 桁の値を計算した。この公式は以後多くの人達に採用され続ける。人手での π の計算の記録としては、William Shanks (1812–1882) が 707 桁計算した (567 桁までが正しかった) のが最高だが、彼もこの公式を使った。

C.F.Gauss (数学界の巨人) は 1863 年に以下の公式を得た。

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{38} + 20\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} + 24\arctan\frac{1}{268}.$$

前者はおそらく 3 項の arctan で表される公式のうちで最も効率が高いらしい。

2005 年現在の最高記録は、2002 年 12 月、金田康正、後保範(うしろやすのり)等のグループが達成した 1 兆 2400 億桁というものだが、それは高野喜久雄の公式

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

による。(この話は WWW で検索すれば色々ヒットするので省略。)

(2006 年 4 月 7 日注: あわてんぼうで分数コマンド `¥frac` を書き落してしまって、変な公式を掲示していたのを指摘されて修正しました。罪滅ぼしをかねて: 円周率に関しては 2005 年度卒研でも取り上げました。卒研レポートを `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/#2005` で公開しています。)

3　レポート課題 7

以下の問題を Mathematica を用いて解いて、レポートせよ。Subject: は「情報処理 II 課題 7」、締め切りは 7 月 13 日とする。Mathematica に与えたコマンドと結果 (この二つはノートブックを添付すると良い)、その説明 (数式を書く必要がある場合は、例えば部分的に TEX を使って `$2^2\cdot 3^3\cdot 5$` とか、`$\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+x^3}$` のように書いたりしてもよい。もちろん説明全体を TEX で書けばなお良い。) の 3 点が必要。

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k}, \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2^k}, \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^k}, \sum_{k=1}^{50}\frac{1}{2^k}$ を計算せよ。また、それらの値を正確に小数に直せ。

2. $\alpha > 0$ に対して $\sqrt{\alpha}$ を求めるために Newton 法による漸化式

$$x_n = \alpha - \frac{x_{n-1}^2 - \alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{\alpha}{x_{n-1}}\right) \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

が利用できるわけだが (初期値は $x_1 = 1$ で十分)、これを用いて $\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$ を計算せよ。また精度についても検討せよ。

ヒント: この問題はなるべく自分で関数を定義したり、リストを使ったり、工夫して解くこと。(素朴にやっても手で計算するよりはずっと楽に正確に計算できるけれど)。

$\sqrt{3}$ の場合: 最初の 10 項とその 2 乗

```
Out[7]=
{1.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 2.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 1.7500000000000000000000000000000000000000000000000,
 1.7321428571428571428571428571428571428571428571429,
 1.7320508100147275405007363770250368188512518409426,
 1.7320508075688772952543539460721719142351067091198,
 1.7320508075688772935274463415058723678036950907820,
 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104,
 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104,
 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104}

In[8]:= %*%

Out[8]=
{1.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 4.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 3.0625000000000000000000000000000000000000000000000,
 3.0003188775510204081632653061224489795918367346939,
 3.0000000084726737969074333952945616550371875820155,
 3.0000000000000000059821834221717890832802247230968,
 3.0000000000000000000000000000000000029822098747089,
 3.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 3.0000000000000000000000000000000000000000000000000,
 3.0000000000000000000000000000000000000000000000000}
```