情報処理 II No.8

力学系とリミット・サイクル

桂田 祐史

1995 年 6 月 15 日

前回提供したプログラムを、ほんの少し修正するだけで色々な問題が解けます。いざと言う時はこの程度の数値計算を実行できるようにしておくと、扱える問題の幅が広がります。

1　力学系と Poincaré のリミット・サイクル

1.1　力学系

これまで常微分方程式一般を表すために $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ と書いて来ましたが、右辺に現われる f が t に依らない場合、つまり

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

という形の方程式を**力学系**(**dynamical**[1] **system**) あるいは自励系 (autonomous system) と呼びます。実はこの「情報処理 II」で取り扱った常微分方程式はすべてこの形のものでした。

力学系は以下のようなイメージでとらえることが出来ます。

空間内に時間によらない「流れ」があり、
点 x での流れの速度[2]**は $f(x)$ となっている。**

力学系の初期値問題とは、ある時刻での質点の位置を指定して、後はこの流れにまかせて移動した場合の、質点の運動を決定するものである、と言うことが出来ます。

1.2　平衡点と線形化

f が行列とベクトルの積の形になっている $f(x) = Ax$ の場合は、少し理論的な話をしました (前回)。一般の力学系も、この講義で解説した方法によって計算機を用いて解くことは可能ですが、理論的なアプローチとしてはどういうものが可能でしょうか？

一つの重要な方法は、**平衡点**をすべて見つけて、その回りの流れを「**線形化の手法**」で解析する、というものです。

[1] “mechanics” の「力学」ではありません。“dynamical” は「動的」という意味で、“statical” の反対語です。

[2] $\dfrac{dx}{dt}$ は速度を意味することは分かりますね？

(ここで平衡点とは、方程式の右辺が 0 となるような点、すなわち $f(a)=0$ を見たす点 a のことです。直感的には、そこでは流れが止まっている点のことです。a が平衡点である場合、$x(t)\equiv a$ (値が恒等的に a となる関数) は方程式 (1) の解になります。)

線形化という言葉を説明する前に、実例を見て下さい。

例題 8-1　次の力学系の流れの様子を $-4\le x,y\le 4$ で描きなさい:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-6x-y-3x^2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

まず最初に平衡点を求めましょう。方程式の右辺のベクトル値関数 f が 0 になるという条件、つまり連立方程式

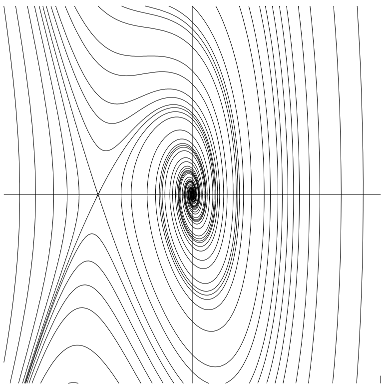
$$y=0,\quad -6x-y-3x^2=0$$

を解くと、$(x,y)=(0,0),(-2,0)$ となりますから、$\binom{0}{0},\binom{-2}{0}$ という 2 点が平衡点です (それ以外に平衡点はありません)。「$-4\le x,y\le 4$ で描きなさい」としたのは、その二つの平衡点のまわりの様子が分かるような範囲で描きなさい、という意味です。

さて、これを実行するには前回のプログラムをちょっと修正すれば OK です。そうして作ったプログラム `reidai8a.f` を用意してあります。いつものように `getsample` コマンドで手元にコピーした後に、コンパイルして実行してみましょう。ここではサンプルの入力データを収めたファイル `rei8a.data` もありますので、それを使って試すことにすれば、

```
getsample                       ← サンプルをコピー
f77x reidai8a.f                 ← コンパイル
cat rei8a.data | reidai8a       ← サンプル・データで実行
```

で OK です。



さて、これを見て何に気がつくでしょうか？全体としては、これまで見たことがない図ですが、平衡点の近くでは、「どこかで見た」形をしていますね？

$\binom{0}{0}$ の回りでは安定渦状点、$\binom{-2}{0}$ の回りでは不安定結節点のような流れになっています。

大事なことは二つあって、一つは

平衡点は力学系の「ツボ」であって、
それを調べると多くの情報が分かる。

というものです。上の図で平衡点から離れたところはかなり単純な流れになっていることに注意して下さい。試しに描く範囲を大きくとって、自分でマウスを使って初期値を与えた図を描いてみるのもいいですね。次の例では $-100 \le x, y \le 100$ の範囲で描くように指定しています (基本的な使い方はこれまでと同じなので、もう説明は不要ですね？)。

```
waltz11% reidai8a
 範囲(xleft,ybottom,xright,ytop)?
-100 -100 100 100
 したいことを番号で選んで下さい。
  -1:メニュー終了, 0:初期値のキーボード入力, 1:初期値のマウス入力,
   2:change h,T(h= 0.0100,T=10.0000)
1
 マウスの左ボタンで初期値を指定して下さい（右ボタンで中止)。
```

もう一つの大事なことは、平衡点の周囲の流れがどうなるかは、微分法を使ってある程度まで解析できるということです。上の例題の右辺の f を微分してヤコビ行列を作ると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6-6x & -1 \end{pmatrix}$$

となりますが、平衡点 $\binom{0}{0}$, $\binom{-2}{0}$ での値はそれぞれ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

となります。$\binom{0}{0}$ の回りでの流れは $\dfrac{dx}{dt} = A_1 x$ の原点での流れに、$\binom{-2}{0}$ の回りでの流れは $\dfrac{dx}{dt} = A_2 x$ の原点での流れに似ている、ということです。

ちょっと詳しく解説:なんでヤコビ行列なんかが出て来るのか、不思議に感じる人がいるかも知れません。高校数学を思い出すと、「微分する＝接線の傾きを求める（接線を引く)」、という幾何学的理解が有効でした。接線の傾きを知るだけで結構色々なこと (関数がそこの近くで x の増加にともない増加しているのか、減少しているのか、極値となっているか等) が分かるということでした。曲線 $y = f(x)$ の点 $x = a$ における接線 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ とは、a の近くで、f を 1 次式で近似したもの、ということです (というか、そういうふうに解釈するのが、微分法の現代的な見方です)。大学の数学では、話が多次元になってしまって、微分することの意味が少し見え難くなりましたが、「微分するとは 1 次式で近似することだ」という認識は有効です。多次元の場合の 1 次式とは $Ax + b$ (A は行列、x,b はベクトルで、Ax は行列とベクトルのかけ算を表す) の形の式のことです。つまり $f(x)$ を点 a で微分して、微分係数 (ヤコビ行列) が A になったということは、$f(x) \simeq A(x-a) + f(a)$ と考えられる、ということだったわけですね。a の近くでは、 $A(x-a) + f(a)$ という 1 次式を調べるだけで、色々分かる、ということです。

問題 8-1　上の例題 8-1 の説明中に現われた力学系 $dx/dt = A_1 x$, $dx/dt = A_2 x$ について調べなさい。特に流れの図を描いてみて、力学系 (2) の流れと見比べて見なさい。

問題 8-2　次の力学系について、平衡点を調べ (前回のプリントの分類に従うと、どのタイプか？)、流れの様子を示す図を描きなさい。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - y \end{pmatrix}.$$

(ヒント: 平衡点は $\binom{n\pi}{0}$ (n は整数) で、無限個ありますが、右辺は x につき周期 2π なので、$\binom{0}{0}$ と $\binom{\pi}{0}$ を調べれば十分です。この二つをすっぽり含むような範囲の図を書いて下さい。)

1.3　リミット・サイクル

前節では平衡点の解析の重要性を説明したのですが、2 次元の力学系には、もう一つ、周期運動を意味する閉軌道という大事なものがありました (単振動とかで既に見ましたね？)。

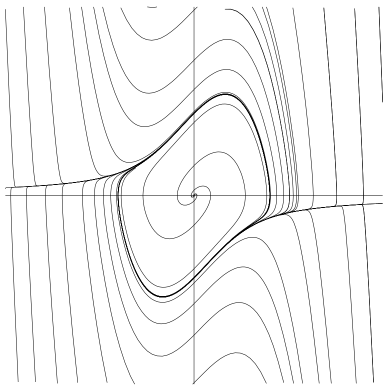
前回では、渦心点というものがあった時に、閉軌道が現われたのですが、一般の力学系では渦心点がなくても閉軌道が現われます。ここではもう面倒な理屈抜きで、それを見てもらいましょう。

例題 8-2　van der Pol[3] の方程式 $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$ (μ は正定数) を一階に直して出来る力学系

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + \mu(1 - x^2)y \end{pmatrix} \tag{3}$$

の流れの様子を $-5 \le x, y \le 5$ の範囲で描きなさい。

上の例題と同様に reidai8b.f というプログラムと rei8b.data というサンプル・データを用意してあります。それを使って描いた図が



です。原点を回っている一つの閉軌道が目につきますが、特徴的なのは、その付近の軌道が、閉軌道にまつわりついて行っていることです。描画中の図を眺めていると分かりますが、どこからスタートしても速やかに閉軌道に近付いていきます。この種の閉軌道 (サイクル) のことを**リミット・サイクル** (極限閉軌道、limit cycle) と呼びます。

時間が経つと、はるか彼方に飛んでいってしまうような現象は別にして、時間によって変化する現象のうちの多くのものは長い時間が経つと、ある停止状態に落ち着くか（沈点)、周期運動（極限閉軌道）に落ち着きます。2 次元の常微分方程式という簡単なモデルで、そういう現象を見ることが出来たわけです。

[3] ファンデルポール、と読みます。

問題 8-3　次の方程式で定まる力学系の流れの様子を $-5 \le x, y \le 5$ の範囲で描きなさい。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - x(x^2 + y^2) \\ -x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

微分方程式について、最後に一言:実は、世の中のすべての力学系は上に述べたようなものだけで十分説明し切れると（暗黙のうちに）信じられていた時期があります。日常生活のレベルでは、今でもそう信じている人が多いでしょう。例えば、気象現象などで長年の平均値からずれたこと— 異常気象 — が生じるのは、何かこれまでにはなかった「異常な」原因があるに違いない、という推論をしたりします。これは、原因がシンプルならば結果もシンプルである（定常状態に落ち着いたり、きちんと周期的に変動するようになる）と信じているためです。でも、今ではこの「思い込み」が本当に正しいかどうかは、個々の場合を詳しく調べてみないと分からない、と考えられようになりました。それは計算機シミュレーションを通じてカオス (chaos、混沌) と呼ばれる現象が見つかったからです。それはシンプルなメカニズムで支配される系が、極めて複雑で、ほとんど予測不可能と言える結果を生じさせることを呼びます。カオスの発見の物語は、計算機と科学の研究の関係について色々考えさせてくれる、面白いものです。

2　追加の問題

問題 8-4　No.5 の方程式の解を求める問題では、二分法、Newton 法などの繰り返し計算によって、段々精度の高い近似解を得ることが出来たが、二つの方法で収束の速さがどのくらいか、対数グラフ (No.6 で紹介した) を利用して調べなさい。

問題 8-5　以下の、振り子の振動を記述する微分方程式の初期値問題を解きなさい。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta. \tag{1}$$

ここで ℓ は振り子の長さ、g は重力加速度で (MKS 単位系では $g \approx 9.8 m/sec^2$ です)、いずれも正の定数です。$\theta = \theta(t)$ は振り子の鉛直線からの傾きをあらわす量で、未知関数です。初期条件としては、オモリを時刻 $t = 0$ で、鉛直線から角度 α のところから、そっと手放すということを意味する

$$\theta(0) = \alpha, \quad \theta'(0) = 0 \tag{2}$$

を課します。周期 T を求めてみなさい。特に初期角度 α を色々変えたとき、どうなるか調べなさい (振り子の等時性は成り立っていますか？)。

問題 8-6　3 次元の力学系のうち、Chaos で有名な、いわゆる Lorenz Model

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sigma x + \sigma y \\ y'(t) &= rx - y - xz \\ z'(t) &= -bz + xy \end{aligned}$$

に初期条件

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ z(0) &= y_0 \end{aligned}$$

を課した初期値問題を解いて、相図を描け。ここで σ, r, b は正定数。このパラメータの選定は重要な意味を持つが、 まずは Lorenz が例として選んだという値（$\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$）を試してみよ。