情報処理 II No.7

定数係数線形常微分方程式

桂田 祐史

1995 年 6 月 9 日

1　問題の説明 — 定数係数線形常微分方程式

前回は常微分方程式の初期値問題に対する数値解法 (Euler 法、Runge–Kutta 法) の紹介をしましたが、今回はそれを連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} &= cx + dy \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}), \qquad \begin{cases} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

を解くのに使ってみましょう。ここで $x = x(t)$, $y = y(t)$ は未知関数、a, b, c, d, x_0, y_0 は既知定数です。

この問題は後で注意するように、色々な応用があって重要ですが、それだけではなく、数学的にも基本的で面白く、是非一度は数値実験を体験しておきたいものです。

注意 1　この問題は、計算機を使わなくても線形代数を用いて解くことが出来ます。既にどこかで習っているかもしれませんし、そうでない場合も三年次の常微分方程式の講義で学ぶことになるでしょう。(このプリントの末尾に計算の仕方だけ説明しておきます。)

後で数学的な説明をするときのために、問題をベクトル、行列を用いて書き換えましょう。

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

とおくと[1]、$\vec{x} = \vec{x}(t)$ は未知の 2 次元ベクトル値関数、 A は 2 次の実正方行列、$\vec{x}_0$ は $\mathbf{R}^2$ の要素となり、問題は

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{1}$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{2}$$

と書き直されます。このような問題を**定数係数線形常微分方程式**の初期値問題とよびます。

[1] 今回は x がベクトルであることを強調するために矢印 $\vec{\ }$ をつけて $\vec{x}$ と書きます。

初期値問題 (1), (2) の解は平面内での点の運動を表わしていると考えることが出来ます。初期値 $\vec{x}_0$ を色々と変えて、それに対応する解 $\vec{x}(t)$ の軌跡 (解軌道と呼びます) を描いてみましょう。この解軌道を考える時の空間 (ここでは平面 $\mathbf{R}^2$) を相空間 (phase space)[2]と呼びます。

$f(t,\vec{x}) = Ax$ とおくと、方程式 (1) は

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(t,\vec{x})$$

となって、前回の方程式と同じ形になります。前回紹介した Euler 法、Runge–Kutta 法などの数値解法は（実数だったところが、ベクトルになるだけで）まったく同様に適用することが出来ます。

注意 2　高校までの数学で、最も簡単で基本的な関数は正比例の関数 $x \mapsto ax$ (a は定数) でしょう。ここでの線形写像 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (A は正方行列) は、正比例の関数の一般化と考えられ、最も基本的な写像と言えるでしょう。

注意 3　(物理からの例) いわゆる単振動の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\omega \text{ は正定数})$$

は $y = dx/dt$, $\vec{x} = {}^t(x,y)$ と置くことにより (1) の形に帰着されます。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

同じ置き換えで、速度に比例する抵抗力がある場合の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega, \gamma \text{ は正定数})$$

も (1) の形に帰着されます。この場合は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

2　例題プログラムによる実験

今回の例題は一つだけで、これで遊んでもらうだけでよしとします。

2.1　例題プログラムの使い方

例題 7-1　問題 (1),(2) で適当な係数行列を選び、初期値 $\vec{x}_0$ を色々と変えて、それに対応する解軌道を描け。

いつものように `getsample` コマンドでサンプルプログラムをコピーした後に、`f77x` でコンパイルして、実行して下さい。

[2] “phase space” は数学以外の本では「位相空間」と訳されることが多いですが、数学では「相空間」という訳語を用います。これは「位相空間」という言葉は数学では “topological space” の訳語に使われるからです。

```
waltz11% getsample
waltz11% f77x reidai7-1.f
waltz11% reidai7-1
```

最初に行列 A の成分 a, b, c, d を尋ねてきますので、自分が調べたいと思う行列を選んで入力します。

```
a,b,c,d=
0 1 -1 -1
```

するとウィンドウが開かれた後に、次のようなメニューが表示されます。

```
 したいことを番号で選んで下さい。
  -1:メニュー終了, 0:初期値のキーボード入力, 1:初期値のマウス入力,
   2:刻み幅,追跡時間変更（現在 h= 0.0100,T=10.0000)
```

この意味は希望することを選ぶのに、-1 から 2 までの整数を入力しなさい、ということです。'0' を入力すると、キーボードから数値で初期条件 $x0, y0$ を入力することになります。

```
0                                              ← 0 番を選択する。
初期値 x0,y0=                                  → x0,y0 の入力の催促。
0.5 0.5                                        ← 0.5 0.5 を入力。
```

また '1' を入力した場合は、マウスで初期値を指定することが出来ます。fplot のウィンドウの中の初期値としたい点のところまでマウス・カーソルを移動して、マウスの左ボタンをクリックします。

```
マウスの左ボタンで初期値を指定して下さい（右ボタンで中止)。
(x0,y0)=-0.724609   -0.365234                  → マウスで指定した点の座標
マウスを使って初期値を入力して下さい。         → 次の入力を催促
```

これに対してマウスの真中のボタンを押すと、t が負の方向に解きます。マウスを一箇所に固定したまま、左のボタンと真中のボタンを押して効果を確かめて下さい。

マウスを使っての初期値の入力を止めるには、マウスの右ボタンを押します。するとメニューまで戻るはずです。

メニューを抜けるには、メニューで '-1' を入力します。その後マウスを fplot ウィンドウに持っていき、ボタンをクリックすると reidai7-1 を終了することが出来ます。

ここでは初期値のサンプル・データ reidai7-1.data も用意してあります (内容は注意 3 の二つ目の方程式で $\omega = \gamma = 1$ の場合の実験です)。これを試すには以下のようにして下さい。

```
waltz11% cat reidai7-1.data | reidai7-1
```

注意 4　このサンプルの例では、解軌道は後で述べるように、内向きの対数螺旋 (らせん) になります。時刻 t が大きくなると点 $\vec{x}(t)$ は急速に原点に近付くのですが、到達はしません。画面では見分けがつきませんので、誤解しないように注意して下さい。

2.2 解説

さて、今日はこの `reidai7-1` で色々（行列を替えて）実験してもらうのが目的なのですが、まったく闇雲にやっても、なかなかうまく行かない（重要な現象に遭遇できない）でしょうから、以下少し数学的背景を説明します。

行列 A を変えると、解軌道の作るパターンが変わるのですが、それらは以下のように比較的小数のケースに分類されます。どのケースに属するか調べるには、行列 A の固有値に注目します。A の固有値とは A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

の根 λ_1, λ_2 のことでした。

Case I. A の固有値が相異なる 2 実数である場合

固有値がいずれも 0 でない場合は、原点が唯一の平衡点になっていますが、詳しく分類すると

(i) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$（ともに正）ならば湧出点（不安定結節点）

(ii) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$（ともに負）ならば沈点（安定結節点）

(iii) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$（異符号）ならば鞍状点

となります（湧出点、沈点、鞍状点の定義はここには書きません。自分で試してみて納得してください）。

(iv) λ_1, λ_2 のいずれか一方が 0 ならば、ある原点を通る一つの直線上の点が平衡点の全体となります。

Case II. A の固有値が 2 重根で、A が対角化可能である場合

これは結局 $A = \lambda I$ と書けるということで (λ は固有値)、単純なケースです。$\lambda \neq 0$ である限り、原点は唯一の平衡点となり、$\lambda > 0$ ならば湧出点、$\lambda < 0$ ならば沈点です。$\lambda = 0$ ならば平面上のすべての点が平衡点です (つまり $A = 0$ で、全然動かない)。

Case III. A の固有値が 2 重根で、A が対角化不能である場合

例えば $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のような場合です。$\lambda \neq 0$ であれば原点が唯一の平衡点で、$\lambda > 0$ であれば湧出点、$\lambda < 0$ であれば沈点です。$\lambda = 0$ であれば、原点を通るある直線上の点すべてが平衡点となります。

Case IV. A の固有値が二つの相異なる虚数である場合

この場合、固有値は $\mu \pm i\nu (\mu, \nu$ は実数, $\nu \neq 0)$ と書けます。平衡点は原点だけです。

1. $\mu > 0$ であれば、解軌道は外向きの対数螺旋になります。こういう場合「原点は不安定渦状点である」と言います。
2. $\mu < 0$ であれば、解軌道は内向きの対数螺旋になります。こういう場合「原点は安定渦状点である」と言います。
3. $\mu = 0$ であれば、解軌道は楕円になります（特別な場合として円を含みます）。こういう場合「原点は渦心点（または中心点）である」と言います。

問題 7-1　様々な場合にについて、自分で適当な行列 A を探して解軌道を描いてみなさい。（自分で探すのが面倒という人は、以下の行列を試してみて下さい。どの Case に相当しますか？）

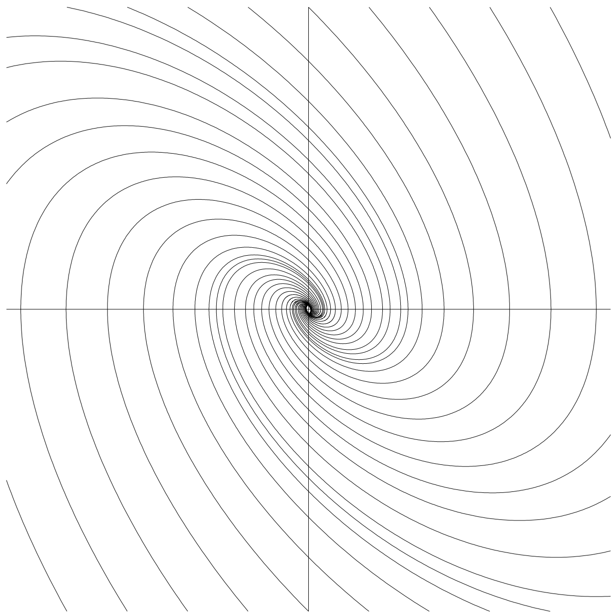
$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Fortran プログラムの read 文では、分数を読み込めません。必ず小数に変換してから入力して下さい。たとえば $\frac{4}{5}$ は 0.8 として入力します。)

問題 7-2　`reidai7-1` で Runge–Kutta 法を用いているところを Euler 法に書き変えなさい。いくつかの行列（特に Case IV-3 に属するもの）に対する問題 (1),(2) を 2 つのプログラムで解き比べて見なさい。

問題 7-3　注意 3 であげた 2 つの微分方程式は上の分類でどこに属するか？また解軌道を見て、その解のどんな性質が分かるか？

問題 7-4　`reidai7-1` で、初期値をキーボードから数値で入力する方法とマウスで入力する方法の長所、短所を論じなさい。



3　補足 — 紙と鉛筆で解く方法

ここに書いてあることは、線形代数や常微分方程式を学んでいる際に学ぶ機会があると思いますが、一応まとめておきます。

3.1 定数係数線形常微分方程式の解の公式, 行列の指数関数

定数係数線形常微分方程式の初期値問題 (1),(2) の解は一意で $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$ で与えられる。ここで e^{tA} は行列の指数関数というもので、次式で定義される:

$$e^B = \exp B \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

いくつか具体例をあげると、$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の場合 $e^B = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ の場合 $e^B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ の場合 $e^B = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ となる (定義にしたがって計算してみれば、5 分もあれば確かめられるであろう)。

後のために $\exp(P^{-1}BP) = P^{-1}e^BP$ となることを注意しておく。

3.2 $N = 2$ の場合の e^{tA}, $e^{tA}\vec{x}_0$

今回の問題を理解するため、行列の指数関数を $N = 2$ の場合に詳しく解析してみる。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として、A の固有方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ の根を判別して場合分けする。

(I) 相異なる 2 実根 λ_1, λ_2 を持つ場合

u_i を λ_i に属する A の固有ベクトルとする $(i = 1, 2)$ とすると、u_1, u_2 は線形独立になるので、任意の $x_0 \in \mathbf{R}^2$ は

$$x_0 = c_1u_1 + c_2u_2$$

と u_1, u_2 の線形結合で表すことが出来る。これから

$$A^nx_0 = A^n(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1A^nu_1 + c_2A^nu_2 = c_1{\lambda_1}^nu_1 + c_2{\lambda_2}^nu_2 = {\lambda_1}^n(c_1u_1) + {\lambda_2}^n(c_2u_2),$$

$$e^{tA}x_0 = e^{\lambda_1 t}(c_1u_1) + e^{\lambda_2 t}(c_2u_2).$$

(つまり各 u_i 成分 c_iu_i に関しては $e^{\lambda_i t}$ をかけるという単純な作用になる。)

行列の言葉で書くと、 $P = (u_1\ u_2)$ と置くと、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}, \quad P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}t \end{pmatrix}.$$

これから

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(II) 重根 λ_0 を持つ場合

この場合は、一次独立な固有ベクトルが 2 つ取れるか、1 つしか取れないかで、二つの場合に別れる。

(II-i) 重根 λ_0 に属する二つの一次独立な固有ベクトル u_1, u_2 が存在する場合

上と同様にして $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, これは実は $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ということだから、

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & 0 \\ 0 & \lambda_0^n \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}, \quad e^{tA}x_0 = e^{\lambda_0 t}x_0.$$

(II-ii) 重根 λ_0 に属する一次独立な固有ベクトルが一つしか取れない場合

仮定より $\mathbf{R}^2 \neq \ker(\lambda_0 I - A)$ であり、$u_2 \in \mathbf{R}^2 \setminus \ker(\lambda_0 I - A)$ が存在する。そこで $u_1 = (A - \lambda_0 I)u_2$ とおくと $u_1 \neq 0$.

一方で $(A-\lambda_0 I)^2 = O$ である (実際 λ_0 は固有方程式の重根だから、固有多項式 $= (\lambda-\lambda_0)^2$. ゆえに Hamilton-Cayley の定理から $(A-\lambda_0 I)^2 = O$.)。よって $(A-\lambda_0 I)u_1 = (A-\lambda_0 I)^2 u_2 = 0$ すなわち $Au_1 = \lambda_0 u_1$.

これと $Au_2 = u_1 + \lambda_0 u_2$ から $P = (u_1\ u_2)$ とおくと、 $AP = A(u_1\ u_2) = (Au_1\ Au_2) = (\lambda_0 u_1\ u_1 + \lambda_0 u_2) = (u_1\ u_2)\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. u_1, u_2 は一次独立だから P^{-1} が存在して、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. これから

$$P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} \lambda_0^n & n{\lambda_0}^{n-1} \\ 0 & {\lambda_0}^n \end{pmatrix}, \quad P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

(III) 相異なる 2 虚根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1})$ を持つ場合

$\alpha+i\beta$ に属する固有ベクトルの一つを $x+iy$ $(x, y \in \mathbf{R}^2)$ とする。$A(x+iy) = (\alpha+i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ の実部、虚部を取ると、$Ax = \alpha x - \beta y$, $Ay = \beta x + \alpha y$, それで $P = (x\ y)$ とおくと、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. これから

$$P^{-1}e^{tA}P = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

これから $\alpha = 0$ ならば、$e^{tA}\vec{x}_0$ は t に関する周期関数であることが分かる（解軌道は楕円になる）。$\alpha > 0$ ならば $e^{tA}\vec{x}_0$ は段々原点から遠ざかり、$\alpha < 0$ ならば $e^{tA}\vec{x}_0 \to \vec{0}$ $(t \to \infty)$ であることも分かる。