

常微分方程式の初期値問題 (3) 振り子の運動

ガリレオはなぜ振り子の等時性を発見できたか

桂田 祐史

1992年6月3日

1 はじめに

前回までで基本的な道具がある程度そろったので、今日は「振り子の運動」をとりあげて詳しく調べてみましょう。振り子の運動は既にガリレオによって色々調べられています。彼は18才の時に

振り子の振動の周期 T は振幅に無関係に一定であるという「振り子の等時性」を発見しました¹。さらには振り子の周期がオモリの質量によらないことも発見して、これが有名な落体の法則の発見のきっかけになったと言われています。

ところが、これだけ有名な振り子の等時性なのですが、実は厳密には正しくなくて、振幅が小さい時に近似的に成り立つに過ぎない、ということが今では知られています。しかし、その解析はあまり簡単でないので、普通のカリキュラムでは学びません。ここでは難しい数学²には立ち入らずに、計算機によるシミュレーションで調べてみます。

¹ 当時は時計もなかったので、自分の脈拍を数えて時を測ったということです。その後振り子を利用した時計が出来たのは話がアベコベになったわけで面白いですね。

² 楕円積分、楕円関数という数学的道具立てが必要になります。これらは前世紀の数学の重要な研究テーマでしたが、現在では上澄みに相当する部分をさっと学ぶだけになっています。

2 数学的定式化

振り子のふれの角（鉛直線を基準に測る）を θ とし、これを時刻 t の関数と考えると、次の微分方程式を満たすことが力学から分かります³:

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta.$$

ここで ℓ は振り子の長さ、 g は重力加速度を表わしています (MKS 単位系では $g \approx 9.8m/sec^2$ です)。以下ではいずれも正の定数として考えます。

オモリを時刻 $t = 0$ で、鉛直線から角度 α のところから、そっと手放すという場合は

$$(2) \quad \theta(0) = \alpha, \quad \theta'(0) = 0$$

という初期条件になります。

力学の入門書では、振幅が小さい場合は $\sin \theta \approx \theta$ という近似⁴が有効であるとして、しばしば

$$(3) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta, \quad \text{ここで } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

という方程式で置き換えて考えます。この (3) は単振動の方程式ですから簡単に解けます。一般解は

$$(4) \quad \theta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

で、初期条件 (2) を課すと、 $A = \alpha, B = 0$ となり、初期値問題 (3),(2) の解は

$$\theta(t) = \alpha \cos \omega t$$

となります。また周期 T は初期条件にはよらず（特に振幅 α には関係しない）定数 $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ となります（つまり「単振動については“等時性”が成立する」）。

さて、それでは (1) を (3) で近似するのはどの程度の正当性があるのでしょうか？これを計算機シミュレーションで見替えるのが今回の目標です。数値計算する立場では、(1) と (3) で特に難易度に差があるわけはありませんから、気軽に両者を解き比べてみる事が出来ます。

³この段階で運動が質量によらないことが分かります（方程式に質量が含まれていないから）。我々はガリレオが知らなかった Newton 力学の成果を使えるため、こころへんは見通しが良いですね。

⁴Taylor 展開が $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$ ですから、いわゆる線形化 (= 1 次近似 - 1 次式で近似すること) をしていることとなります。

3 シミュレーションのやり方

まず前回は解説したやり方で、方程式 (1) を一階の方程式に直しましょう。 $x = \theta, y = \frac{d\theta}{dt}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin x \end{pmatrix}$ とおけば (1) は

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$$

となります。また初期条件 (2) は

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。この形になれば既に紹介した常微分方程式の初期値問題の数値解法を適用することが出来ます。reidai6-1.f は振り子の長さ、初期条件、追跡時間、時間区間の分割数を指定してもらって Runge-Kutta 法により初期値問題 (1),(2) を解くプログラムです。このプログラムは計算結果を画面ではなく、直接ディスク上のファイル “data.txy” に出力するようになっています。

```
waltz11% f77o reidai6-1.f
```

```
waltz11% reidai6-1
```

振り子の長さ 1、初期値 x_0, y_0 を入力して下さい。 入力の
催促

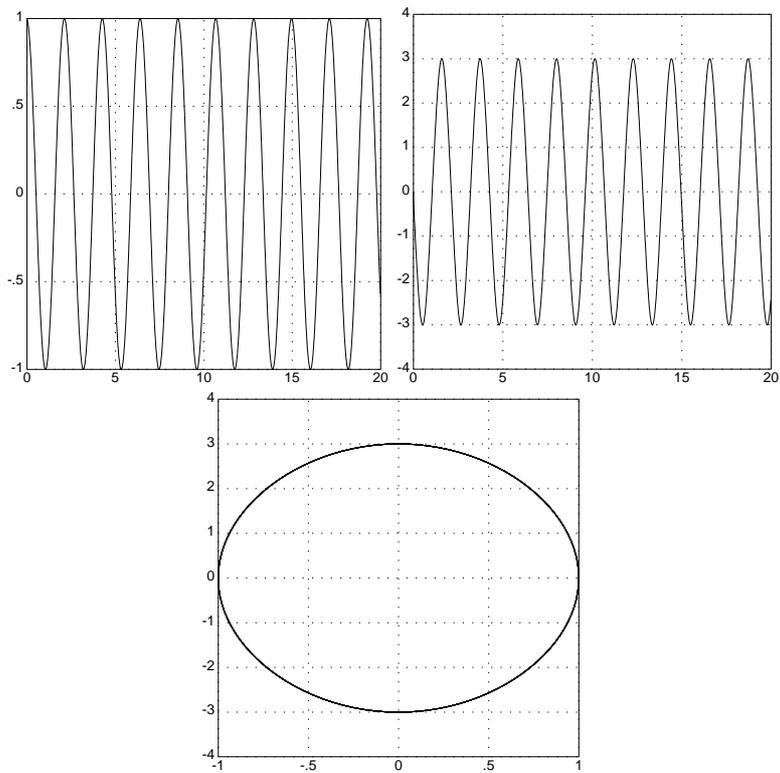
```
1 1 0      長さ 1m, 振れの角 1 radian, 初  
速 0 radian/sec
```

追跡時間、分割数を入力して下さい。 入力の
催促

```
20 1000      20 秒間、1000 分割
```

こうしてファイル “data.txy” が得られます (中をちょっとのぞいてみて下さい)。1列目が時刻 t , 2列目が $x(=\theta)$, 3列目が $y(=d\theta/dt)$ です。こうして作られるデータを元に $t-x$ 図、 $t-y$ 図、 $x-y$ 図を描いてみました。うまく読み取ることが出来ますか？

左から順に $t-x$ 図、 $t-y$ 図、 $x-y$ 図



問題 6-1: l, α を色々変えてグラフを描きなさい。どうやって描いたか (これを見い出すのがこの問題の半分を占める) 説明しなさい。また、同じ l, α に対して単振動 (3),(2) を解いて比べてみなさい。

以上の図は、ただ一つの初期値について調べただけですが、前回と同様に相空間上 (ここでは $x-y$ 平面) に複数の解軌道を描いて「流れ」を見てみるのも有益です。reidai6-2.f は前回の reidai5-1.f を元にしたプログラムです。使い方も良く似ています。コンパイルして起動すると、振り子の長さをまず尋ねてきますので適当な値を入力します (追跡時間はプログラムが適当に設定します – もちろん後で変更することも出来ます)。

```
waltz11% f77o reidai6-2.f
```

```
waltz11% reidai6-2
```

振り子の長さ 1 を入力して下さい。

1

長さ 1m を

指定

単振動の場合の周期= 2.00709, 追跡時間= 8.02836

するとウィンドウを開き、メニューを表示してユーザーの指示を待ちます。

したいことを番号で選んで下さい。

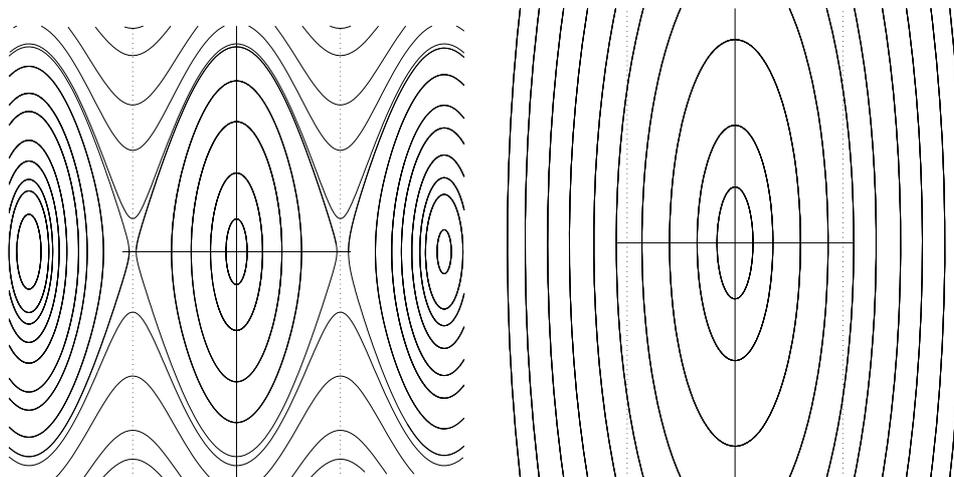
-1:メニュー終了, 0:初期値のキーボード入力, 1:初期値のマウス入力,

2:追跡時間、分割数変更(現在 追跡時間= 8.0284 , 分割数=400)

実際に操作して「流れ」を体得してください。

注意: 前回と比べて fplot の機能はかなり向上しました。主なものは (1) ウィンドウのサイズの変更が可能になった(以前は変更するとそれまでに描いたものが消えてしまいました) (2) きれいなプリンター出力が得られるようになった、の二点です。後者については、例えば reidai6-2 を終了すると “furiko.pl” というファイルが出来ているはずですが、これはプログラムの終了間際に “call mkplot('furiko.pl')” を実行したことにより出来たものですが、その瞬間のウィンドウに表示されていた図形データを納めたファイルです。これを画面で見ると “cat furiko.pl | xplot”, 印刷するには “cat furiko.pl | plot2ps | lpr” とします。次に掲げる図もそのようにして作られたものです(点線は $x = \pm\pi$ という直線です)。

左の図は振り子の解軌道、右の図は単振動の解軌道



4 等時性はどの程度成り立っているのか？

前節で描いた解軌道からも、振幅が小さい時は単振動に近いが、振幅が大きくなるとズレが大きくなるのは予想されます。ズレがどの程度のものか、周期という数値について、調べてみましょう。

reidai6-1 で計算したデータについて、 x が 0 となる時刻 t を計算してみました（具体的にどうするかは、次の問題にします）。

```
oyabun% comp-period-from-data
0.515056
1.58517    1.07012    2.14023    1列目は x=0 となる時刻
2.65529    1.07011    2.14022    2列目は前回そうだった時
からの時間
3.72540    1.07012    2.14023    3列目は2列目の2倍（周
期の推測値）
4.79551    1.07011    2.14022
中略
17.6371    1.07011    2.14022
18.7072    1.07012    2.14023
19.7774    1.07021    2.14043
```

これを見ると、大体周期 $T = 2.1402$ 程度であると分かります。単振動の場合は $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2.00708992315\dots$ ですから⁵、約 7% 程度の差があります。

問題 6-2: 自分で確かめてみなさい。特に 0 に近い α について振り子の周期を求めてみて単振動の場合と比べてみなさい。

問題 6-3: 実は振り子の周期は ($\theta(t)$ を求めるのよりはやや簡単に) $T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K(\sin\frac{\alpha}{2})$ と表わすことが出来る。ここで $K(k)$ は第一種の完全楕円積分と呼ばれるもので

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

で定義されるが、これは $|k| < 1$ で以下のような級数表示を持つ。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}k^6 + \dots \right).$$

このことを用いて、上で実験した場合について、周期を計算して比較せよ。

⁵ここでは両者を比較するため、 $g = 9.8$ が高い精度で成立すると仮定して議論しています。