**多変数の微分積分学 2 練習問題**　(2007 年 10 月 11 日, 10 月 18 日)

**問 4**　演習のプリントの問 3 をなるべくたくさん解け。

今回は全部こうなる (だから 1 変数関数の積分計算の復習)

(★)
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x)G(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b F(x)\,dx\right)\left(\int_c^d G(y)\,dy\right).$$

$\sqrt{x^2+k}$, $1/\sqrt{x^2+k}$ の積分 (基礎数学 3 の復習)

$k$ を実定数とするとき、部分積分により (自分でやってみること！)

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\right).$$

この右辺の第 2 項に関しては

(♯)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|.$$

一般に、$R(x,y)$ を $x$, $y$ の有理式とするとき、$\int R\left(x, \sqrt{x \text{ の 2 次式}}\right)dx$ は 1 変数の有理関数の積分に帰着され、初等関数の範囲で原始関数が求まる。

**解**　自分で解くことにチャレンジしてから答を見ること。

(1) 与式 $= \int_0^1 x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

(2) 与式 $= \int_0^1 x^3\,dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\cdot\tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$. 公式 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x$ は忘れずに。なお、$\tan^{-1}1$ を求めるには、

$$\theta = \tan^{-1}1 \iff \left(\tan\theta = 1 \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \iff \theta = \frac{\pi}{4}$$

とする。

(3)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (y-x)^2\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{(y-x)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x^3-(x-2)^3\right]dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left([x^4]_0^1 - [(x-2)^4]_0^1\right) = \frac{1}{12}(1-(1-16)) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

あるいは被積分関数を展開して

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_\Omega (y^2-2xy+x^2)dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^2 y^2\,dy - 2\int_0^1 x\,dx\int_0^2 y\,dy + \int_0^1 x^2\,dx\int_0^2 dy \\
&= 1\cdot\frac{2^3}{3} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (y+x)^{1/2}\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(y+x)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left((x+2)^{3/2} - x^{3/2}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left\{\left[(x+2)^{5/2}\right]_0^1 - \left[x^{5/2}\right]_0^1\right\} = \frac{4}{15}\left(3^{5/2} - 2^{5/2} - 1\right) = \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

(5) $A=[-1,1]\times[-1,1]$ であることに注意せよ。

$$与式 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(y+x+4)^{-2}dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{-1}{y+x+4}\right]_{y=-1}^{y=1}dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)dx$$
$$= \left[\log|x+3|-\log|x+5|\right]_{-1}^{1} = \log 4-\log 2-\log 6+\log 4 = \log\frac{4\cdot 4}{2\cdot 6} = \log\frac{4}{3}.$$

(6) 求める積分を $I$ とおくと、

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} xye^{-xy^2}\,dy\right)dx.$$

内側の積分を計算するため $xy^2=u$ とおくと、$2xy\,dy=du$, $y=0$ のとき $u=0$, $y=1$ のとき $u=x$ であるから、

$$\int_0^1 xye^{-xy^2}\,dy = \int_0^x \frac{1}{2}e^{-u}\,du = \left[-\frac{e^{-u}}{2}\right]_0^x = \frac{1-e^{-x}}{2}.$$

ゆえに

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{1-e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x+e^{-x}\right] = \frac{1}{2}\left[1-(-1)+(e^{-1}-e^{1})\right] = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right).$$

この重積分は、先に $x$ についての積分を行うと、後がかなり難しくなる (一応は計算できるようであるが)。

(7) $与式 = \int_0^{\pi/2} x^2\,dx\int_0^2 y\sin(xy^2)\,dy.$ $y$ に関する積分を計算するため $xy^2=u$ と置換すると $y\,dy=\dfrac{du}{2x}$ となるので、

$$\int_0^2 y\sin(xy^2)dy = \int_0^{4x}\sin u\frac{du}{2x} = \frac{1}{2x}\left[-\cos u\right]_0^{4x} = \frac{1-\cos 4x}{2x}.$$

ゆえに

$$与式 = \int_0^{\pi/2}\frac{x}{2}dx - \int_0^{\pi/2}\frac{x\cos 4x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi/2} - \left(\left[\frac{x\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin 4x}{8}dx\right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

最後の $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin 4x\,dx=0$ はグラフを頭に思い浮かべると即答できる (サインカーブ一周期分)。

(8) 求める積分を $I$ とおくと、

$$I=JK,\quad J:=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\sqrt{(2x+1)(2x-3)}dx,\quad K:=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\frac{dy}{\sqrt{1-4y^2}}.$$

$J$ を求めるには、まず根号内を平方完成して、適当な 1 次関数の変数変換を探す。

$$(2x+1)(2x-3) = 4x^2-4x-3 = 4(x^2-x)-3 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}-3 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4.$$

$x-\dfrac{1}{2}=u$ とおくと、$dx=du$, $x=\dfrac{3}{2}$ のとき $u=1$, $x=2$ のとき $u=\dfrac{3}{2}$ であるから、

$$J = \int_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{4u^2-4}\,du = 2\int_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{u^2-1}\,du = 2\cdot\frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-1}+(-1)\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|_1^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1}-0\right) - \left[\log\left|\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-1}\right|-0\right] = \frac{3\sqrt{5}}{4}-\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$K$ については、$2y=u$ とおくと、$dy=\dfrac{1}{2}du$, $y=0$ のとき $u=0$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $1-4y^2=1-u^2$ であるから、

$$K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}u\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

ゆえに

$$I = JK = \frac{\pi}{8}\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}-\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).\blacksquare$$