多変数の微分積分学 1 練習問題 No. 8　(2013 年 6 月 10 日出題,　月　日提出)

＿年 16 組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿

問 8　(1) 関数 $f(x,y) := \sqrt{17-5x^2-4y^2}$ のグラフの $(-1,1,2\sqrt{2}\,)$ における接平面の方程式を求めよ。
(2) 関数 $F(x,y,z) := \dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(z-1)^2}{9}$ のレベルセット $L_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; F(x,y,z)=1\right\}$ について、次の問に答えよ。(a) $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, 3\right) \in L_1$ における、L_1 の接平面の方程式と法線を求めよ。(b) 平面 $x+y+z=k$ (k は実定数) が L_1 の接平面になるように、k の値を求めよ。

```
L=3
g1=ContourPlot3D[(x+1)^2/1+y^2/4+(z-1)^2/9==1,
   {x,-1-L,-1+L},{y,-L,L},{z,1-L,1+L}]
g2=Plot3D[-x-y+Sqrt[14],{x,-1-L,-1+L},{y,-L,L}]
g3=Plot3D[-x-y-Sqrt[14],{x,-1-L,-1+L},{y,-L,L}]
g=Show[g1,g2,g3,BoxRatio->-1,PlotRange->All]
Export["toi8.png",g]
```

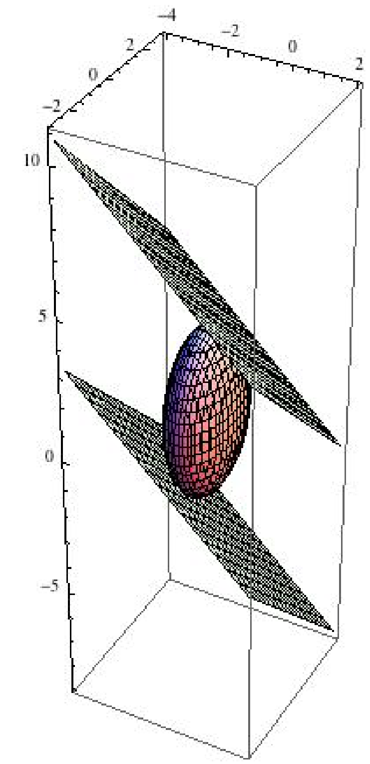

図 1: $\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(z-1)^2}{9}=1$ に $x+y+z=k$ が接する

問 8 解説

(1) 授業中に説明したことを確認しておく。

> 2 変数関数 f のグラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における接平面は
> $$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

$f(-1,1)=\left.\sqrt{17-5x^2-4y^2}\right|_{x=-1,y=1}=\sqrt{17-5-4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ である。

$$f_x(x,y)=\frac{-10x}{2\sqrt{17-5x^2-4y^2}}=\frac{-5x}{\sqrt{17-5x^2-4y^2}},$$
$$f_y(x,y)=\frac{-8y}{2\sqrt{17-5x^2-4y^2}}=\frac{-4y}{\sqrt{17-5x^2-4y^2}}$$

であるから

$$f_x(-1,1)=\frac{-5\cdot(-1)}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4},\quad f_y(-1,1)=\frac{-4\cdot 1}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$$

ゆえに $x=f(x,y)$ の $(x,y)=(-1,1)$ における接平面の方程式は

$$z=f(-1,1)+f_x(-1,1)(x-(-1))+f_y(-1,1)(y-1)=2\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}(x+1)-\sqrt{2}(y-1).$$

整理して

$$z=\frac{17+5x-4y}{2\sqrt{2}}.$$

(2) 授業中に「F のレベルセット $F(x)=c$ 上の点 a における接 (超) 平面の方程式は、$\nabla F(a)\cdot(x-a)=0$」と説明した。3 次元バージョンは次のようになる。

> $F(x,y,z)=d$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は、
> $$\nabla F(a,b,c)\cdot\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix}=0\quad\text{i.e.,}\quad F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0.$$

$F\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2/4+2^2/9=1$ であるから、確かに $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)$ は $F(x,y,z)=1$ 上の点である。$\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)$ における接平面は

$$(\sharp)\qquad \nabla F\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)\cdot\begin{pmatrix}x-(-\frac{2}{3})\\ y-\frac{4}{3}\\ z-2\end{pmatrix}=0.$$

ところで

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2(x+1)\\ \frac{y}{2}\\ \frac{2(z-1)}{9}\end{pmatrix},\quad \nabla F\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{4}{9}\end{pmatrix}=\frac{2}{9}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}.$$

ゆえに ($\sharp$) は

$$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x+\frac{2}{3}\\y-\frac{4}{3}\\z-2\end{pmatrix}=0.$$

整理して

$$3x+3y+2z=6.$$

一方、$\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},3\right)$ における法線は

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

(3) $F(x,y,z)=1$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における法線ベクトルは

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix}2(x_0+1)\\\dfrac{y_0}{2}\\\dfrac{2(z_0-1)}{9}\end{pmatrix}.$$

これが $(1,1,1)$ と平行であるには、

$$\exists t\in\mathbf{R}\quad\text{s.t.}\quad\begin{pmatrix}2(x_0+1)\\\dfrac{y_0}{2}\\\dfrac{2(z_0-1)}{9}\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

このとき

$$x_0=-1+\frac{t}{2},\quad y_0=2t,\quad z_0=1+\frac{9t}{2}.$$

(x_0,y_0,z_0) が $F(x,y,z)=1$ 上にあるので

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(2t)^2+\frac{1}{9}\left(\frac{9t}{2}\right)^2=1.$$

$$\frac{1}{4}t^2+t^2+\frac{9}{4}t^2=4\quad\Leftrightarrow\quad\frac{14}{4}t^2=1\quad\Leftrightarrow\quad t=\pm\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

であるから

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\\\pm\frac{4}{\sqrt{14}}\\1\pm\frac{9}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}.$$

接平面は $x+y+z=k$ の形になることから (複号同順[1]で計算して)

$$k=-1\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\pm\frac{4}{\sqrt{14}}+1\pm\frac{9}{\sqrt{14}}=\pm\sqrt{14}.\blacksquare$$

[1] こういう古めかしい言葉は教科書からは駆逐されているはずで、もう使うべきではないかもしれない。「垂線の足」、「題意」なんてのもそのお仲間か。