多変数の微分積分学１ 練習問題 No.6 (2013年5月27日出題, 　月　日提出)

＿年16組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿

問6　$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、$f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

解答　まず

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h},$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}.$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0^3\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

$h\neq 0$ とするとき、

$$f_x(0,h)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0+k,h)-f(0,h)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3h}{k^2+h^2}-\frac{0^3\cdot h}{0^2+h^2}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2h}{k^2+h^2}=\frac{0}{h^2}=0.$$

$$f_y(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{h^3k}{h^2+k^2}-\frac{h^3\cdot 0}{h^2+0^2}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{h^3}{h^2+k^2}=\frac{h^3}{h^2}=h.$$

ゆえに

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}==\lim_{h\to 0}0=0.$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1.\blacksquare$$

別解　$f_x(0,h)$, $f_y(h,0)$ を求めるのに、商の微分法から得られる

$$f_x(x,y)=\frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\quad((x,y)\neq(0,0)),\quad f_x(0,y)=0\quad(y\neq 0),$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\quad((x,y)\neq(0,0)),\quad f_y(x,0)=x\quad(x\neq 0).$$

を用いることも出来る。■

注意事項

- 類似の問題でそうなることが多いので、$f_x(0,0)$ や $f_y(0,0)$ は途中経過なしに 0 と書く人が多いけれど、いつもそうとは限らないので、省略せずに書くべきである。
- $$f_x(0,h)-f_x(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0+k,h)-f(0,h)-f(0+k,0)+f(0,0)}{k}$$

  は $f_x(0,h)$, $f_x(0,0)$ の存在が分かっていれば正しい式だが、それらの存在を示していない段階では根拠不十分である。