多変数の微分積分学1 練習問題 No. 13 (2013年7月22日)

__年16組____番　氏名______________

問 13　$f(x,y) := x^2+3xy+y^2$, $g(x,y) := x^2+y^2-1$, $N_g := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とする。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。(2) N_g 上で $\nabla g \neq 0$ であることを示せ。
(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g における f の極値の候補を求めよ。(4) N_g における f の最大値、最小値を求めよ。

解答 $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(1) 省略。

(2) $\nabla g(x,y)=0$ とすると、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。$g(0,0)=-1\neq 0$ であるから、$(0,0)\notin N_g$. すなわち、$\nabla g(x,y)=0 \Longrightarrow (x,y)\notin N_g$ が示せた。ゆえに $(x,y)\in N_g \Longrightarrow \nabla g(x,y)\neq 0$.

(3) (2) で示したことから、条件 $g(x,y)=0$ の下での条件付き極値 (N_g での極値) は、Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち、(x,y) で極値を取ったとすると、$\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t.

$$(\text{☆})\qquad \nabla f(x,y)=\lambda g(x,y),\quad g(x,y)=0.$$

成分で書くと

$$\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+2y \end{pmatrix}=2\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad x^2+y^2=1.$$

前者から $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. これは λ が、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値で、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が λ に属する固有ベクトルと言うことを意味する。

線形代数で学んだ手順で解いて、$\lambda=\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$ で、$\lambda=\frac{5}{2}$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t\in\mathbf{R})$, $\lambda=-\frac{1}{2}$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t\in\mathbf{R})$.

$x^2+y^2=1$ と連立して、

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{5}{2}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right).$$

$(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、$f(x,y)=\frac{5}{2}$, $(x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、$f(x,y)=-\frac{1}{2}$.

(4) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合でコンパクト、$f\colon N_g\to\mathbf{R}$ は連続 (多項式関数だから) であるから、f は N_g 上で最大値と最小値を持つ。

最大値は極大値であるが、(2) からそれは Lagrange の未定乗数法で求まる。(3) から $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{5}{2}$, $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$ のいずれかが最大値ということになるが、$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}$ が最大値でないのは明らか (もう一方の点で 5/2 という値を取るので) であるから、最大値は $\dfrac{5}{2}$ である。

同様に最小値は $-\dfrac{1}{2}$ である。■