多変数の微分積分学１ 練習問題 No.11　(2013 年 7 月 8 日出題, 7 月　日提出)

＿年 16 組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿

問 11　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(固有値求めづらい)

解答　先に結果だけ書くと (1) 正値, (2) 負値, (3) 不定符号, (4) 不定符号, (5) 正値, (6) 負値, (7) どれでもない, (8) どれもない, (9) どれでもない, (10) 正値, (11) 負値, (12) 不定符号, (13) 正値, (14) 負値, (15) 正値, (16) 不定符号
((7), (8), (9) を「どちらでもない」と書く人が少なくないけれど、3 つあるのだから「どれでもない」と書くべきであろう。)

以下、行列 A の k 次首座小行列を A_k と書くことにする。

(1) 対角行列だから、固有値は対角成分の 2, 1. ともに正だから正値である。

(2) 対角行列だから、固有値は対角成分の -2, -1. ともに負だから負値である。

(3) 対角行列だから、固有値は対角成分の 2, -1. 正と負だから、不定符号である。

(4) 問題の行列を A とおくと、

$$\det A_1 = A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3^2 = -5 < 0.$$

ゆえに、A は負値でなく、正値でもない。A の固有値を λ_1, λ_2 とおくと、これらは実数で $\lambda_1\lambda_2 = \det A < 0$. ゆえに固有値は異符号であり、$A$ は不定符号である。

(別解) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)-(-3)(-3) = \lambda^2 - 5\lambda - 5$ であり、固有値は $\dfrac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ である。正と負だから不定符号である。

(5) 問題の行列を A とおくと、

$$\det A_1 = A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \det A = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 16 - 9 = 7 > 0.$$

任意の k に対して $\det A_k > 0$ が成り立っているので、A は正値である。

(別解) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2 - 3^2 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda-1)(\lambda-7)$ であり、固有値は 1, 7 である。共に正であるから正値である。

(6) (これは前問の行列の -1 倍だから、負値である。)

問題の行列を A とおくと、

$$\det A_1 = A_1 = -4 < 0, \quad \det A_2 = \det A = (-4)^2 - (-3)^2 = 7 > 0.$$

$(-1)^k \det A_k > 0\ (\forall k)$ を満たしているので、A は負値である。

(別解) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda+4)^2 - 3^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 7 = (\lambda+1)(\lambda+7)$ であり、固有値は -1, -7 である。共に負であるから負値である。

(7) 問題の行列を A とおくと、

$$\det A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0.$$

ゆえに A は負値でなく、正値でもない。A の固有値を λ_1, λ_2 とおくと、$\lambda_1\lambda_2 = \det A = 0$ であるから、2 つの固有値のうち少なくとも一つは 0 である。ゆえに A は不定符号ではない (2 次の正方行列 A が不定符号であれば、$\det A$ は負である)。

(別解) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1) - 2^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda-5)$ であり、固有値は 0, 5 である。固有値に 0 があるので、正値でも負値でもない。また正の固有値はあるが、負の固有値はないので、不定符号でもない。

(8) これは対角行列なので、固有値は対角成分で、0, 0. 正でない固有値 0 があるので正値ではなく、負でない固有値 2 があるので負値ではなく、正と負両方の固有値があるわけでない (負の固有値はない) ので不定符号ではない。

(9) これは対角行列なので、固有値は対角成分で、2, 0. 正でない固有値があるので正値ではなく、負でない固有値があるので負値ではなく、正と負両方の固有値があるわけでないので不定符号ではない。

(10) 対角行列だから、固有値は対角成分の 2, 1, 3. みな正だから正値である。

(11) 対角行列だから、固有値は対角成分の $-2, -1, -3$. みな負だから負値である。

(12) 対角行列だから、固有値は対角成分の $1, -2, 0$. 正の固有値と負の固有値があるので不定符号である。

(13) 問題の行列を A とおくと、

$$\det A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 > 0,$$
$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot 1 = 7 > 0$$

であるから、$\det A_k > 0\ (\forall k)$ が成り立っていて、正値であることが分かる。

(別解) A の 特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-4)^2 - (-3)^2) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7) = (\lambda-1)^2(\lambda-7)$ であり、固有値は 1, 1, 7 である。すべて正であるから正値である。

(別解) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ とブロック分けでき、対角線上にあるブロック以外はすべて 0 である。ゆえに対角線上にあるブロックの固有値を調べればよい。$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は既に見たように正値である。右下のブロックの固有値は 1 でこれも正である。ゆえに正値である。

(14) 問題の行列を A とすると、

$$\det A_1 = -4 < 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-4)^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot (-2) = 7 \cdot (-2) = -14 < 0$$

であり、$(-1)^k \det A_k > 0$ $(\forall k)$ が成り立っているので、A は負値であることが分かる。

(別解) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda+4 & -3 \\ -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$ $(\lambda+2)((\lambda+4)^2-(-3)^2) = (\lambda+2)(\lambda^2+8\lambda+7) = (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda+7) = (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+7)$ であり、固有値は $-1, -3, -7$ である。すべて負であるから負値である。

(別解) これも $A = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ とブロック分けすると、固有値は、$A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値と、-2 を合わせたものだと分かる。A_2 は負値であるので (省略)、問題の行列の固有値はすべて負であることが分かり、負値である。

(15) 問題の行列を A とすると、

$$\det A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4^2 - 1^2 = 15 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 64 - 4 - 4 = 56 > 0$$

であり、$\det A_k > 0$ $(\forall k)$ が成り立っているので、正値であることが分かる。

(別解) A の特性多項式は

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-4 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+1)}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-4)\left((\lambda-4)^2 - (-1)^2\right) - (\lambda-4) = (\lambda-4)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 14\right)$$

であり、固有値は $4, 4 \pm \sqrt{2}$ である。すべて正であるから正値である。

(16) 問題の行列を A とすると、$\det A_1 = 1 > 0$, $\det A_2 = -2 < 0$, $\det A_3 = -24 < 0$. $\det A_1 < 0$ でないので負値でなく、$\det A_2 > 0$ でないので正値でない。一方で $\det A_3 = 0$ でないので 0 は固有値でない (従って、すべての固有値は正または負の実数である)。以上より、A は正負両方の固有値を持つことが分かるので、不定符号である。

(注意) A の特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda + 24 =: p(\lambda)$. これは不還元の場

合で、Cardano の公式でも虚数の 3 乗根が現れ、扱いづらい。実際、この多項式の根は

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(6 + \frac{7\ 6^{2/3}}{\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}} + \sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}\right),$$

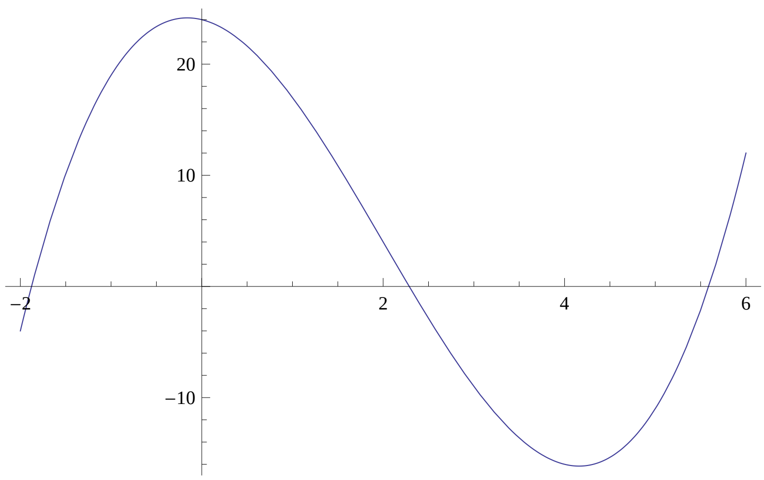
$$2 - \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7+7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}},$$

$$2 + \frac{i\left(\sqrt{3}+i\right)\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7-7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}}.$$

これは (もちろん) いずれも実数で

$$\lambda \fallingdotseq 5.580664\cdots, 2.2874\cdots, -1.877074\cdots.$$

関数としての p のグラフは次のようになる ($p'(\lambda) = 0$ の根 $\lambda = \frac{6\mp\sqrt{42}}{3}$ について、$\frac{6-\sqrt{42}}{3} < 0 < \frac{6+\sqrt{42}}{3}$ であること、p の極値 $p\left(\frac{6\mp\sqrt{42}}{3}\right) = \frac{4\left(9\pm 7\sqrt{42}\right)}{9}$ (正と負), $p(0) = 24 > 0$, であることを使うと、$p(\lambda)$ の根の符号が分かる程度の p のグラフの概形は分かる)。



概形が分かれば、$p(-2) < 0$, $p(0) > 0$, $p(4) < 0$, $p(6) > 0$ をチェックして、$(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 6)$ に根があることが分かる。3 次方程式なので、他に根はない。正と負の根があるので、不定符号である。 ■

余談: アルゴリズムの追求

固有値計算作戦　固有多項式 $\varphi(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ を計算して、その根を求める。$n = 2$ のときは 2 次方程式の解の公式で計算可能であるが、$n \geq 3$ になると困難になる。$n = 3$ であっても、いわゆる不還元の場合には、解が虚数の 3 乗根を含む形で表されることになる (微積分を使えば何とか処理できるが面倒である)。

首座小行列式作戦　$k = 1, 2, \cdots$ に対して、$\det A_k$ (A_k は A の k 次首座小行列) を計算して符号を調べる。

(i) すべて正である ($\forall k \in \{1, \cdots, n\}\ \det A_k > 0$) ことは、$A$ が正値であるための必要十分条件である。

(ii) 負から始まり、負と正が交互に現れる ($\forall k \in \{1, \cdots, n\}\ (-1)^k \det A_k > 0$) ことは、$A$ が負値であるための必要十分条件である。

(iii) 上の (i), (ii) のいずれでもない場合、$\det A$ を計算する。もし $\det A \neq 0$ であるならば、A は不定符号である。$\det A = 0$ のときは、一般には面倒だが、

  (a) $n = 2$ の場合は、正値、負値、不定符号のいずれでもないと結論できる ($\det A < 0 \iff A$ は不定符号)。

  (b) また $n = 3$ の場合は、固有多項式が容易に因数分解可能で、符号の判定は容易である。結論だけ書いておくと

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

  が $\det A = 0$ を満たすとき、

$$\lambda_1 \lambda_2 = -b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df$$

  が負ならば不定符号、そうでないならば正値でも負値でも不定符号でもない。

  (c) $n \geq 4$ の場合は研究課題であろう。

Gauss の消去法作戦　(「ベクトル空間論」で、2 次形式を平方完成することで標準形に変形して符号数を調べる方法を学んだようですが、それと本質的に同じやり方です。こちらの方が解答はあっさり書けますが。) A の対角線から下を掃き出す。A が正値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に正数が並ぶはずである。一方、A が負値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に負数が並ぶはずである。そのいずれでもない場合、必要ならば行交換を施して計算を進めて A の行列式を計算する (行交換を全部で r 回した場合、最終的には対角成分の積 $\times(-1)^r = \det A$ である)。$\det A \neq 0$ ならば、A は 0 を固有値に持たず、正値でも負値でもないので、A は実は不定符号であることが分かる。$\det A = 0$ の場合は少々難しいが、シフトしてみるなどして、「何とかなる」場合が多いであろう。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の場合、行交換なしに

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

となるので、いわゆる符号は $(2,1)$ (正の固有値が 2 個、負の固有値が 1 個) で、不定符号である。

首座小行列式を用いた方法、Gauss の消去法による方法をマスターすべきでしょう。 ■