

# 多変数の微分積分学 1 演習問題 (Part 2)

桂田 祐史

2013年5月27日

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/tahensuu1/>

これ以前の細かい話 (位相の話が多く、微積分の本題からは外れている) はカットする (その部分を Part 1 と呼ぶことにするが、WWW に置いておくだけで、配布はしない)。Taylor の定理～最後までを Part 3 と呼ぶ (これは準備でき次第配布する)。

## 多変数関数の極限・連続性

38. 次の各関数が  $\mathbf{R}^2$  で連続であることを示せ (理由を述べよ)。

(1)  $f(x, y) = x^2 + \sqrt{2}xy + (\log 3)y^2 + \frac{\pi}{4}x + e^5y + 6$  (2)  $g(x, y) = \exp(3x + 2y + 1)$

(3)  $h(x, y) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + y^2 + 1}$  (4)  $\varphi(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$  (5)  $\psi(x, y) = \sin \sqrt[3]{x}$

(6)  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

### 解答

(1)  $1, \sqrt{2}, \log 3, \pi/4, e^5, 6 \in \mathbf{R}$  であるので  $f(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$  である。ゆえに  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。

(2)  $F(x, y) = 3x + 2y + 1, G(z) = \exp z$  とおく。  $F(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$  であるから、  $F: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbf{R}$  は  $\mathbf{R}^2$  全体で連続である。また  $G: \mathbf{R} \ni z \mapsto G(z) \in \mathbf{R}$  は連続である。ゆえにそれらの合成である  $g = G \circ F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。

(3)  $Q(x, y) = x^2 + 2x + 3, P(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  とおくと、  $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$  である。ゆえに  $Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  と  $P: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。また  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$  に対して  $P(x, y) \geq 1$  であるから、  $P(x, y) \neq 0$ 。ゆえに  $h = \frac{Q}{P}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。

$Q(x) = x^2 + 2x + 3$  として、1変数多項式とするのではないことに注意する。

(4)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  とおくと、  $f(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$  であるから、  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。一方  $f(\mathbf{R}^2) = [0, \infty)$  である。  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を  $g(z) = \sqrt{z}$  で定めると、  $g$  は連続である。ゆえに合成関数  $g \circ f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。また  $h: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto 1 \in \mathbf{R}$  は定数関数だから連続である。ゆえに  $F = h + g \circ f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}$  は連続である。そして  $F(\mathbf{R}^2) = [1, \infty)$ 。対数関数  $G: (0, \infty) \ni z \mapsto \log z \in \mathbf{R}$  は連続である。  $F(\mathbf{R}^2) \subset (0, \infty)$  であるから、  $G$  と  $F$  は合成可能で、  $\varphi = G \circ F: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) \in \mathbf{R}$  は連続である

- (5)  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(x, y) := x$  で定めると、 $f$  は連続関数である。また  $g: \mathbf{R} \ni z \mapsto \sqrt[3]{z} \in \mathbf{R}$  も連続である。 $\psi = g \circ f$  であり、 $\psi$  は連続関数の合成関数であるから連続である。
- (6)  $F_1(x, y) = x^3 - 3xy^2 \in \mathbf{R}$ ,  $F_2(x, y) = 3x^2y - y^3 \in \mathbf{R}$  とおくと、 $F_1(x, y), F_2(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$  であるから、関数  $F_1: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  と  $F_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。ゆえに  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$  は連続である。■

**解説** 上の問題と、「 $f$  が  $a$  で連続であれば  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 」(これは定理、あるいは本によっては連続性の定義そのもので、「当たり前」として良い命題) を組み合わせることで、多くの「明らかな極限」が解決する。

39.  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x > 0, y > 0\}$ ,  $f: \Omega \ni (x, y) \mapsto x^y \in \mathbf{R}$  とするとき、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

を求めよ。

40.  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbf{R}^m$  と、 $x \in A$  に関する条件  $P(x)$  があるとき、 $A' := \{x \in A; P(x)\}$ ,  $\tilde{f}: A' \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{R}^m$  とおく ( $\tilde{f}$  は  $f$  の  $A'$  への制限写像である)。  $a \in \overline{A'}$  とするとき、

$$\lim_{\substack{P(x) \\ x \rightarrow a}} f(x) = \lim_{\substack{x \in A' \\ x \rightarrow a}} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)$$

とおく。このとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が存在するならば、

$$\lim_{\substack{P(x) \\ x \rightarrow a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

が成り立つこと (「関数の極限が存在すれば、その制限関数の極限も存在し、極限值は等しい」) を証明せよ。

**注** この問題は定義に戻って考えればほとんど明らかである。対偶を用いる場合がしばしばある。なお、片側極限はこの特別な場合である。例えば

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{\substack{x > a \\ x \rightarrow a}} f(x).$$

41.  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $A \in \mathbf{R}^m$ ,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = A$  ならば、 $\forall k \in \mathbf{R} \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = A$  であることを示せ。

42.  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a \in \overline{\Omega}$  とするとき、以下の (1), (2), (3) を証明せよ。

(1)  $f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} q(x) \neq 0$  (収束しないか、収束しても極限が 0 でない) ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は存在しない。

(2)  $\forall x \in \Omega f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ならば、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

43. つぎの極限值が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 - y^2). \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}. \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}. \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\log(x^2 + y^2)}.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}. \quad (6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}. \quad (8) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}.$$

### 解答

(1)  $f(x, y) := x^2 - y^2$  は多項式関数なので、 $\mathbf{R}^2$  全体で連続である。特に  $(1, 2)$  で連続であるから、 $(x, y) \rightarrow (1, 2)$  のときの極限は、 $f(1, 2)$  に等しい:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = f(1, 2) = 1^2 - 2^2 = 1 - 4 = -3.$$

(2)  $f(x, y) := \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}$  は有理関数で、分母が 0 にならない範囲  $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  で定義されて連続である。 $(0, 1) \in \Omega$  で連続であるから、 $(x, y) \rightarrow (0, 1)$  のときの極限は、 $f(0, 1)$  に等しい:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = f(0, 1) = \frac{1 - 0 \cdot 1}{0^2 + 1^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

(3) この関数は有理関数で、 $(0, 0)$  で分母が 0 になることに注意する。 $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \in (0, \infty)$ ,  $g: (0, \infty) \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbf{R}$  について、 $f(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \subset (0, \infty)$  であるから、合成関数  $g \circ f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  が得られる。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} (x^2 + y^2) = 0^2 + 0^2 = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{\substack{z > 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{1}{z} = \infty$$

であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = \infty.$$

あるいは、

$$f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}, \quad g: \mathbf{R} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z^2} \in \mathbf{R}$$

とするのが良いかもしれない。 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \infty$  であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = \infty.$$

(4)  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき、分子  $= x + y \rightarrow 0$ ,  $x^2 + y^2 \rightarrow +0$ , 分母  $= \log(x^2 + y^2) \rightarrow -\infty$  であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{\log(x^2 + y^2)} = 0.$$

(5) いわゆる不定形  $\frac{0}{0}$  である。近づく方向を限定して考えてみると何か分かることがある。  
 $x$  軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$y$  軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

これら2つの極限が一致しないので、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$  は存在しない。

(6) これも不定形  $\frac{0}{0}$  である。 $x$  軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

この極限は存在しない (右極限  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = 1$  と左極限  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = -1$  は一致しない)。ゆ

えに  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  も存在しない。

(7) これも不定形  $\frac{0}{0}$  である。 $x$  軸、 $y$  軸や、 $y = kx$  ( $k$  は定数) にそつての極限は、すべて0であることが分かる。実際例えば

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (kx)^2}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2x^2}{1+k^2} = 0.$$

これから0に収束しそうだと思当をつけて証明を考える。

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| = x^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq x^2 \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = x^2.$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき右辺は0に収束するので (これは極限の定義に戻れば簡単に示せる、あるいは右辺  $x^2 =: r(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の多項式なので、 $r$  は関数として連続で、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $r(x, y) \rightarrow r(0, 0) = 0$ 、としても良い)、はさみうちの原理から、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(8) これも不定形  $\frac{0}{0}$  である。 $f(x, y) := xy$ ,  $g(z) := \frac{\sin z}{z}$ ,  $a = (0, 0)$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  とおくと、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow a} f(x, y) = b, \quad \lim_{z \rightarrow b} g(z) = c$$

であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow a} g(f(x, y)) = \lim_{z \rightarrow b} g(z) = c = 1.$$

もう少しきちんと書くと:  $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; xy \neq 0\}$ , そして

$$f: A \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbf{R}, \quad g: \mathbf{R} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{\sin z}{z} \in \mathbf{R}$$

とおく。 $f(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の多項式であるから、いたるところ連続である。ゆえに  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$ 。一方 (高校で学んだように)  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 1$  である。 $f(A) \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$  であるから、 $g$  と  $f$  は合成できて、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = 1.$$

44.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  は、 $(x, y)$  が直線に沿って  $(0, 0)$  に近づくととき  $0$  に近づくが、 $(x, y)$  が放物線  $y^2 = x$  に沿って  $(0, 0)$  に近づくととき  $1/2$  に近づくとことを示せ (従って、この  $f$  は  $(0, 0)$  において極限値を持たない)。

ヒント 方針に従って計算するだけ。

45. 
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

46. つぎの関数が原点  $(0, 0)$  で連続かどうか調べよ。

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases} \quad (4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{\log(x^2 + y^2)} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x + y} & (x + y \neq 0) \\ 0 & (x + y = 0). \end{cases}$$

解答 (結果のみ) (1) 連続である (2) 連続である (3) 連続でない (4) 連続である (5) 連続でない

47. 連続関数  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  が  $f(0) > 0$  を満たすとする。このとき次の (1),(2) が成り立つことを示せ。

(1)  $\delta > 0$  が存在して

$$f(x) > 0 \quad (|x| < \delta)$$

が成り立つ。

(2)  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  が存在して、

$$f(x) \geq \varepsilon \quad (|x| < \delta)$$

が成り立つ。

(先に (2) を示すことも出来て、そうすれば (1) は明らかである。)

解答 (1)  $\varepsilon := f(0)$  とおくと、 $\varepsilon > 0$  であるから、 $f$  の  $0$  での連続性によって、 $\exists \delta > 0$  s.t.  $(\forall x \in (-1, 1) : |x - 0| < \delta) |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ . この不等式は  $-\varepsilon < f(x) - f(0) < \varepsilon$  と同値であるが、 $f(0) = \varepsilon$  より  $f(x) > 0$  が得られる。■

## 連続関数の逆像は開集合, 開集合&閉集合の判定

48.  $U, V$  をそれぞれ  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  の開集合、 $f: U \rightarrow V$  を連続関数とする。このとき  $W \subset V$  なる任意の開集合  $W$  に対して、 $f^{-1}(W) := \{x \in U; f(x) \in W\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合となることを証明するため、以下の空欄を埋めよ。「任意の  $a \in$   ア  をとると、 $a \in U$  かつ  $f(a) \in$   イ .  イ  は  ウ  であるから、 $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $B(f(a); \varepsilon) \subset$   イ  (ここで  $B(\alpha; r)$  は中心  $\alpha$ , 半径  $r$  の開球

を表す記号).  $f$  の連続性から  $\exists \delta > 0$  s.t.  $\|x-a\| < \delta \implies x \in U$  かつ  $\|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$ .  
ゆえに  $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset W$  となるが、これから  $B(a;\delta) \subset f^{-1}(W)$ . ゆえに  $f^{-1}(W)$  は開集合である。」

**解答** 「連続関数による開集合の逆像は開集合である」という一般的になりたつ命題の証明である。何も見ずに証明せよと言われたら簡単ではないかもしれないが、この種の証明を見慣れていればいくつかの部分は(極論すれば考えなくても)分かってしまうであろう。(ア)  $f^{-1}(W)$  (イ)  $W$  (ウ) 開集合 (エ)  $\exists$  (オ)  $f^{-1}(W)$ . ■

$m = 1, U = \mathbf{R}^n, V = \mathbf{R}^m = \mathbf{R}, W = (a, \infty)$  とすると、 $f^{-1}(W) = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$  となり、何度も使った定理の別証明となる。 ■

49. 任意の連続関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、 $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合であることを用いて、任意の連続関数  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、以下の  $A, B, C$  が開集合であること、 $D, E, F$  が閉集合であることを示せ。

- (1)  $A = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) < 0\}$  (2)  $B = \{x \in \mathbf{R}^n; 1 < g(x) < 2\}$  (3)  $C = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) \neq 0\}$   
(4)  $D = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) \geq 0\}$  (5)  $E = \{x \in \mathbf{R}^n; 1 \leq g(x) \leq 2\}$  (6)  $F = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) = 3\}$

**解答**

(1)  $f := -g$  とおくと、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$ .

(2)  $f_1(x) := g(x) - 1, f_2(x) := 2 - g(x)$  とおくと、 $B = \{x \in \mathbf{R}^n; f_1(x) > 0\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n; f_2(x) > 0\}$ . 右辺は二つの  $\mathbf{R}^n$  の開集合の共通部分なので、 $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

(3)  $f_1 := g, f_2 := -g$  とおくと、 $C = \{x \in \mathbf{R}^n; f_1(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n; f_2(x) > 0\}$ . 右辺は二つの  $\mathbf{R}^n$  の開集合の合併なので、 $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

(4)  $D^c = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) < 0\}$  は (1) から  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。ゆえに  $D$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。

(5)  $f_1(x) = 1 - g(x), f_2(x) := g(x) - 2$  とおくと、 $E^c = \{x \in \mathbf{R}^n; f_1(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n; f_2(x) > 0\}$ . 右辺は  $\mathbf{R}^n$  の開集合の合併であるから、 $\mathbf{R}^n$  の開集合である。ゆえに  $E$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。

(6)  $\tilde{g}(x) := g(x) - 3$  とおくと、 $F^c = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) \neq 3\} = \{x \in \mathbf{R}^n; \tilde{g}(x) \neq 0\}$ . この右辺は (3) により  $\mathbf{R}^n$  の開集合であるから、 $F$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。 ■

50.  $F \subset \mathbf{R}^n$  で  $f: F \rightarrow \mathbf{R}$  が連続とする。(1)  $\{x \in F; f(x) \geq 0\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合とは限らないことを示せ。(2)  $F$  が  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であるとき、 $\{x \in F; f(x) \geq 0\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であることを示せ。

**命題 0.1**  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  が連続のとき、次の (1)~(4) が成立する。

(1)  $\forall a \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

(2)  $\forall b \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

(3)  $\forall a, b \in \mathbf{R}, a < b$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

(4)  $\forall c \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

**命題 0.2**  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  が連続のとき、次の (1)~(4) が成立する。

- (1)  $\forall a \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。
- (2)  $\forall b \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。
- (3)  $\forall a, b \in \mathbf{R}, a < b$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。
- (4)  $\forall c \in \mathbf{R}$  に対して、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。

**命題 0.3** (1)  $\emptyset$  と  $\mathbf{R}^n$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。(2)  $U_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) が  $\mathbf{R}^n$  の開集合ならば、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。(3)  $U_1$  と  $U_2$  が  $\mathbf{R}^n$  の開集合ならば、 $U_1 \cap U_2$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合である。

**命題 0.4** (1)  $\emptyset$  と  $\mathbf{R}^n$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。(2)  $F_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) が  $\mathbf{R}^n$  の閉集合ならば、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。(3)  $F_1$  と  $F_2$  が  $\mathbf{R}^n$  の閉集合ならば、 $F_1 \cup F_2$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。

51. **命題 0.1~0.4** を用いて、以下の問に答えよ。(  $a, b \in \mathbf{R}, a < b$  である。 )

- (1)  $\mathbf{R}$  の开区間  $(a, b), (-\infty, b), (a, \infty)$  は開集合であることを示せ。
- (2) 区間  $[a, b], (-\infty, b), (a, \infty)$  は閉集合であることを示せ。

52. **命題 0.1~0.4** を用いて、以下の問に答えよ。(  $a \in \mathbf{R}^n, r > 0$  である。 )

- (1)  $\mathbf{R}^n$  の開球  $B(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < r\}$  が  $\mathbf{R}^n$  の開集合であることを示せ。
- (2)  $\mathbf{R}^n$  の閉球  $\bar{B}(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$  が  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であることを示せ。
- (3)  $\mathbf{R}^n$  のシングルトン  $\{a\}$  が  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であることを示せ。

53. **命題 0.1~0.4** を用いて、以下の問に答えよ。 $\mathbf{R}^2$  における次の各集合について、(a) 開集合である場合は証明せよ、(b) 閉集合である場合は証明せよ。

- (1)  $\emptyset$  (2)  $\mathbf{R}^2$  (3)  $\{(0, 0)\}$  (4)  $\{(0, 0), (1, 1)\}$
- (5)  $(1, 2) \times (3, 4)$  (6)  $[1, 2] \times (3, 4)$  (7)  $[1, 2] \times [3, 4]$  (8)  $\{(x, y); 5 < x^2 + y^2 < 6\}$
- (9)  $(0, \infty) \times (0, \infty)$  (10)  $\{(x, y); x^3 \leq y \leq x^2\}$  (11)  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**略解** 図を描くのは省略。

- (1)  $\emptyset$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合であり、 $\mathbf{R}^2$  の閉集合でもある。これは**命題 0.3, 0.4** で済んでいる。
- (2)  $\mathbf{R}^2$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合であり、 $\mathbf{R}^2$  の閉集合でもある。これは**命題 0.3, 0.4** で済んでいる。
- (3)  $\{(0, 0)\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。一般に  $\forall a \in \mathbf{R}^n$  に対して、 $A = \{a\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。実際、 $f: \mathbf{R}^n \ni x \mapsto \|x - a\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \in \mathbf{R}$  は、多項式関数であるから、 $\mathbf{R}^n$

上の連続関数で、 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = 0\}$  は **命題 0.2** (4) により  $\mathbf{R}^n$  の閉集合である。あるいは、

$$A = \bigcap_{j=1}^n F_j, \quad F_j := \{x \in \mathbf{R}^n; x_j = a_j\}$$

と書き直して、各  $F_j$  が **命題 0.2** (4) により  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であること、それと **命題 0.4** (2) を使う、ということも出来る。

- (4)  $A = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。実際、 $A = \bigcup_{j=1}^n F_j$ ,  $F_j := \{\bar{x}_j\}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) と表すことが出来、各  $F_j$  は (3) で示したように  $\mathbf{R}^2$  の閉集合で、**命題 0.4** (3) を使えば良い。
- (5)  $(0, 1) \times (2, 3) = U_1 \cap U_2$ ,  $U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 < x < 1\}$ ,  $U_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 2 < y < 3\}$ . **命題 0.1** (3) を使えば  $U_1$  と  $U_2$  が  $\mathbf{R}^2$  の開集合であることが分かり、**命題 0.3** (3) を使えば  $A$  が  $\mathbf{R}^2$  の開集合であることが分かる。
- (6)  $[0, 1] \times (2, 3)$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合でもないし、 $\mathbf{R}^2$  の閉集合でもない。
- (7)  $A = [0, 1] \times [2, 3]$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。実際  $F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $F_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 2 \leq y \leq 3\}$  とおくと、 $A = F_1 \cap F_2$  で、**命題 0.2** (3) を使えば  $F_1$  と  $F_2$  が  $\mathbf{R}^2$  の閉集合であることが分かるので、**命題 0.4** (2) を使えば  $A$  が  $\mathbf{R}^2$  の閉集合であることが分かる。
- (8)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。 $f(x, y) := x^2 + y^2$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ),  $a = 1$ ,  $b = 4$  とおくと、 $f(x, y)$  は  $x, y$  の多項式で、 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続関数であり、 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a < f(x, y) < b\}$  と書けるので、**命題 0.1** (3) を使えば  $A$  が  $\mathbf{R}^2$  の開集合であることが分かる。
- (9)  $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。 $U_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x > 0\}$ ,  $U_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y > 0\}$  とおくと、 $U_1$  と  $U_2$  は **命題 0.1** (1) より  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。そして  $A = U_1 \cap U_2$  であるから、**命題 0.3** (3) より  $A$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。
- (10)  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^3 \leq y \leq x^2\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。 $f_1(x, y) := y - x^3$ ,  $f_2(x, y) := y - x^2$ ,  $F_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; f_1(x, y) \geq 0\}$ ,  $F_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; f_2(x, y) \leq 0\}$  とおくと、 $F_1$  と  $F_2$  は **命題 0.2** (1), (2) より  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。また  $A = F_1 \cap F_2$  であるから、**命題 0.4** (2) より  $A$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。
- (11)  $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。実際、 $f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$  は連続関数で、 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; f(x, y) > 0\}$  であるから、**命題 0.1** (1) より  $A$  は  $\mathbf{R}^2$  の開集合である。■

## $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の連続関数, 最大値・最小値の存在

54.  $K$  を  $\mathbf{R}^n$  の有界閉集合、 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^m$  を連続とすると、 $f(K)$  は  $\mathbf{R}^m$  の有界閉集合であることを示せ。

55.  $I = [0, 1]$ ,  $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}^n$  は連続とすると、 $\varphi(I) = \{\varphi(t); t \in I\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の閉集合であることを示せ。また  $I = (0, 1)$  や  $I = \mathbf{R}$  とするとき、 $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}^n$  が連続であっても、 $\varphi(I)$  は閉集合とは限らないことを示せ。



56. 連続関数  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [-1, 1]), \quad f(0) > 0$$

という性質を満たすとするとき

$$\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$$

となることを示せ。

**解答**  $\varepsilon := f(0)/2$  とおくと、 $\varepsilon > 0$ . 連続性から、 $\exists \delta > 0$  s.t.  $\forall x \in [-1, 1] : |x - 0| < \delta$   $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ . これから  $\delta' := \min\{1, \delta\}$  とおくと、 $f(x) > f(0) - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$  ( $x \in (-\delta', \delta')$ ). ゆえに

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-\delta'}^{\delta'} f(x) dx + \int_{\delta' \leq |x| \leq 1} f(x) dx \geq \int_{-\delta'}^{\delta'} f(x) dx \geq \int_{-\delta'}^{\delta'} \varepsilon dx = \varepsilon \delta' > 0. \blacksquare$$

57.  $I = [0, 1]$  とする。 $I$  上の連続関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  がいたるところ  $f > 0$  を満たすとき、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I) \quad f(x) \geq \varepsilon \quad (*)$$

が成り立つことを示せ。

**略解**  $\varepsilon := \min\{f(x); x \in [0, 1]\}$  とおけば良い。■

58.  $I$  を  $\mathbf{R}$  の区間とする。 $I$  上の連続関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  がいたるところ  $f > 0$  を満たすとき、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I) \quad f(x) \geq \varepsilon$$

は必ずしも成立しない。 $I = (0, 1]$  の場合、 $I = [0, \infty)$  の場合のそれぞれに条件を満たさない  $f$  の例をあげよ。

**略解**  $I = [1, \infty)$  の場合  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $I = (0, 1]$  の場合  $f(x) = x$ . ■

59. 曲線  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^N$  の像  $\{\varphi(t); t \in [0, 1]\}$  は  $\mathbf{R}^N$  の有界閉集合であることを示せ。

**解答**  $[0, 1]$  は  $\mathbf{R}$  の有界閉集合であり、 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  は連続関数であるから (曲線は定義より連続関数である)、値域  $\varphi([0, 1]) = \{\varphi(t); t \in [0, 1]\}$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界閉集合である。■ (同じ仮定のもとで、「 $\varphi([0, 1])$  は閉集合であることを示せ」という問題があって、上と同じ解答で良いわけだが、その証明に  $[0, 1]$  が有界であることを使うのが初学者には不思議かも知れない。 $[1, \infty)$  のように閉集合ではあるが、有界でない集合を定義域に持つ連続写像  $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  の値域は閉集合とは限らない。反例を探してみよう。)

## 中間値の定理

60.  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  は連続な曲線で、 $\varphi(0) = (0, 0)$ ,  $\varphi(1) = (1, 1)$  とする。この曲線は円  $x^2 + y^2 = 1$  と必ず共有点を持つことを示せ。

**解答**  $\psi(x, y) := x^2 + y^2$  は多項式であるから、 $\psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は連続関数である。合成関数  $f := \psi \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は連続で、

$$f(0) = \psi(\varphi(0)) = \psi((0, 0)) = 0, \quad f(1) = \psi(\varphi(1)) = \psi((1, 1)) = 2$$

であるから、中間値の定理より、 $\exists c \in (0, 1)$  s.t.  $f(c) = 1$ .  $(x_0, y_0) := \varphi(c)$  とおくと、

$$x_0^2 + y_0^2 = \psi(x_0, y_0) = \psi(\varphi(c)) = f(c) = 1$$

であるから、点  $(x_0, y_0)$  は円  $x^2 + y^2 = 1$  と  $\varphi$  の値域の両方に属する。すなわち  $(x_0, y_0)$  は円と曲線との共有点である。■

**61.**  $I$  を  $\mathbf{R}$  の有界な閉区間 (つまり  $a < b$  なる実数  $a, b$  を用いて  $I = [a, b]$  と表される)、 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  を連続関数とすると、 $f(I)$  も  $\mathbf{R}$  の有界な閉区間であることを示せ。

**解答** 中間値の定理より「 $\mathbf{R}$  の任意の区間  $I$  と、任意の連続関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、 $f(I)$  は  $\mathbf{R}$  の区間である」が証明できる。

一方、 $I$  を  $\mathbf{R}$  の有界閉区間とすると、それは  $\mathbf{R}$  の有界閉集合であるから、連続関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  による像  $f(I)$  は  $\mathbf{R}$  の有界閉集合である。

区間が有界閉集合であるとき、それは有界閉区間である。■

## (発展) 点と集合の距離、集合と集合の距離

(微積分の授業ではここまで扱えないが、後でしばしば必要になり、分類してみると、微積分のこのあたりに置くのが適当、という内容であるが、参考までに紹介しておく。)

**62.** (点と閉集合の距離)  $\mathbf{R}^n$  の閉集合  $A$  と、 $x \in \mathbf{R}^n$  に対して、

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

とおく (点  $x$  と集合  $A$  との距離という)。このとき、以下の (1)~(3) を証明せよ。

(1) 任意の  $A, x$  に対して、 $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ .

(2)  $A$  を任意に固定するとき、 $\mathbf{R}^n \ni x \rightarrow d(x, A) \in \mathbf{R}$  は連続関数である。

(3)  $A$  を任意に固定するとき、 $\forall x \in \mathbf{R}^n, \exists a \in A$  s.t.  $d(x, A) = \|x - a\|$ .

**ヒント** (2) 実は、任意の  $x, y \in \mathbf{R}^n$  に対して、 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$  が成り立つ。この不等式を証明しよう。それが出来れば、考えている関数の連続性は明らかである。(3)  $R := d(x, A)$ ,  $K := \overline{B}(x; R+1) \cap A$  とおくと (図を描こう)、 $K$  は有界閉集合なので (なぜ?)、連続関数  $K \ni y \mapsto \|x - y\| \in \mathbf{R}$  の最小値  $\|x - a\|$  ( $a \in A$ ) が存在する。 $A \setminus \overline{B}(x; R+1)$  上の任意の点  $y$  において、 $\|x - y\| > R+1$  に注意すると、 $\|x - a\| = \min_{y \in A} \|x - y\| = d(x, A)$  が成り立つ (なぜ?)。

63. (閉集合と閉集合の距離)  $\mathbf{R}^n$  内の閉集合  $A, B$  に対して、

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\| \quad (= \inf \{\|x - y\|; x \in A, y \in B\})$$

とおくとき、以下の (1), (2) に答えよ。

(1)  $A \cap B \neq \emptyset \implies d(A, B) = 0$  は明らかであるが、逆は必ずしも真でないことを示せ。

(2)  $A$  または  $B$  の一方が有界閉集合であれば、「逆」  $d(A, B) = 0 \implies A \cap B \neq \emptyset$  が成立することを示せ。

**ヒント** (1) いわゆる反例探しをすればよい。具体的な例を1つだけ見つければ十分。次の (2) を見ると、 $A$  も  $B$  も有界でないような場合を探す必要があることが分かる。

## 多変数関数のグラフ

64. 次の関数のグラフ  $z = f(x, y)$  の概形を描け。

(0)  $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leq 2)$

(1)  $f(x, y) = 1 - x - y \quad (x \geq 0, y \geq 0)$

(2)  $f(x, y) = -x^2 \quad (-\infty < x < \infty, y \leq 0)$

(3)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1, y \leq 0)$

(4)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq 2)$

(5)  $f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$

**ヒント** 平面  $y = c$  との交わりは、 $xz$  平面内の曲線  $z = f(x, c)$  で、これは1変数関数のグラフなので考えやすい。それが  $c$  を変えたときどうなるか調べると様子が分かる。同じことを平面  $x = c$  との交わりでやってみる。などなど。■

## 偏微分

65. つぎの関数の1階偏導関数をすべて求めよ。(1)  $5x^2 + 8xy^2 + y^3$  (2)  $\frac{xy}{x+y}$  (3)  $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

(4)  $\log \frac{x+y}{x-y}$  (5)  $y \sin x + \cos(x-y)$  (6)  $\sin(\cos(x+y))$  (7)  $xye^{x+2y}$  (8)  $a^{xy}$  ( $a$  は正の

定数) (9)  $\sin(xy)$  (10)  $\cos(x^2 + y)$  (11)  $\cos(x^3 + xy)$  (12)  $\tan^{-1}(x^2 - 2xy)$  (13)  $\tan^{-1} \frac{y}{x}$

(14)  $\log \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$  (15)  $\cos^{-1} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}$  (16)  $\log \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$  (17)  $\log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

**解答 (結果のみ)** (1)  $f_x = 10x + 8y^2, f_y = 16xy + 3y^2$  (2)  $f_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}, f_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$   
(3)  $f_x = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}, f_y = -\frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$  (4)  $f_x = -\frac{2y}{x^2-y^2}, f_y = \frac{2x}{x^2-y^2}$   
(5)  $f_x = y \cos x - \sin(x-y), f_y = \sin x + \sin(x-y)$  (6)  $f_x = f_y = -\sin(x+y) \cos(\cos(x+y))$   
(7)  $f_x = y(1+x)e^{x+2y}, f_y = x(1+2y)e^{x+2y}$  (8)  $f_x = (y \log a)a^{xy}, f_y = (x \log a)a^{xy}$   
(9)  $f_x = y \cos(xy), f_y = x \cos(xy)$  (10)  $f_x = -2x \sin(x^2+y), f_y = -\sin(x^2+y)$   
(11)  $f_x = -(3x^2+y) \sin(x^3+xy), f_y = -x \sin(x^3+xy)$  (12)  $f_x = \frac{2(x-y)}{1+(x^2-2xy)^2}, f_y = -\frac{2x}{1+(x^2-2xy)^2}$   
(13)  $f_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$  (14)  $f_x = \frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}, f_y = -\frac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}$   
(15)  $f_x = \frac{1}{1+x^2}, f_y = \frac{1}{1+y^2}$  (16)  $f_x = -\frac{y}{x^2-y^2}, f_y = \frac{x}{x^2-y^2}$  (17)  $f_x = -\frac{x}{x^2+y^2}, f_y = -\frac{y}{x^2+y^2}$

**66. 次の関数の1階偏導関数を求めよ。** (1)  $xyz$  (2)  $e^{xyz}$  (3)  $\log(x^2+y^2+z^2)$  (4)  $\sin(xyz)$   
(5)  $a^{xyz}, a > 0$  (6)  $\sin(x+y+z) + \cos z$  (7)  $x \cos y + \sin^{-1} z$  (8)  $\sqrt{xyz}$  (9)  $e^{\sin(xyz)}$  (10)  $e^{\cos(xyz)}$   
(11)  $\tan\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$  (12)  $x \cos^{-1}(y-3z) + \sin^{-1}(xy)$  (13)  $\sin(xy) + \cos(zx)$   
(14)  $x^2 \sin^{-1}(yz)$  (15)  $\tan^{-1} \frac{xy}{z}$  (16)  $e^{xy} \cos(xyz)$  (17)  $\log \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$  (18)  $\log \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} - \frac{xy}{z}$

**解答 (結果のみ)** (1)  $f_x = yz, f_y = zx, f_z = xy$  (2)  $f_x = yze^{xyz}, f_y = zxe^{xyz}, f_z = xye^{xyz}$   
(3)  $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, f_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$  (4)  $f_x = yz \cos(xyz), f_y = zx \cos(xyz), f_z = xy \cos(xyz)$  (5)  $f_x = (\log a)yz a^{xyz}, f_y = (\log a)zx a^{xyz}, f_z = (\log a)xy a^{xyz}$   
(6)  $f_x = \cos(x+y+z), f_y = \cos(x+y+z), f_z = \cos(x+y+z) - \sin z$  (7)  $f_x = \cos y, f_y = -x \sin y, f_z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$  (8)  $f_x = \frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}, f_y = \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}, f_z = \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}$  (9)  $f_x = yz \cos(xyz) e^{\sin(xyz)}, f_y = zx \cos(xyz) e^{\sin(xyz)}, f_z = xy \cos(xyz) e^{\sin(xyz)}$  (10)  $f_x = -yz \sin(xyz) e^{\cos(xyz)}, f_y = -zx \sin(xyz) e^{\cos(xyz)}, f_z = -xy \sin(xyz) e^{\cos(xyz)}$  (11)  $f_x = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right) \sec^2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right), f_y = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) \sec^2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right), f_z = \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right) \sec^2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$  (12)  $f_x = \cos^{-1}(y-3x) + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, f_y = -\frac{x}{\sqrt{1-(y-3x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}, f_z = \frac{3z}{\sqrt{1-(y-3x)^2}}$  (13)  $f_x = y \cos(xy) - z \sin(zx), f_y = x \cos(xy), f_z = -x \sin(zx)$  (14)  $f_x = 2x \sin^{-1}(yz), f_y = \frac{x^2z}{\sqrt{1-y^2z^2}}, f_z = \frac{x^2y}{\sqrt{1-y^2z^2}}$  (15)  $f_x = \frac{yz}{z^2+x^2y^2}, f_y = \frac{zx}{z^2+x^2y^2}, f_z = -\frac{xy}{z^2+x^2y^2}$  (16)  $f_x = ye^{xy} \cos(xyz) - yze^{xy} \sin(xyz), f_y = xe^{xy} \cos(xyz) - zxe^{xy} \sin(xyz), f_z = -xye^{xy} \sin(xyz)$  (17)  $f_x = \frac{1}{y^2+z^2}, f_y = -\frac{y}{y^2+z^2}, f_z = -\frac{z}{y^2+z^2}$  (18)  $f_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{z}, f_y = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{x}{z}, f_z = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{xy}{z^2}$

67.  $f(x, y) := y^2 + \tan\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$  とするとき、次式を示せ。

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^2.$$

68.  $f(x, y) := x \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$  とするとき、次式を示せ。

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

69.  $f(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  とするとき、次式を示せ。

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 3f.$$

70.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) は原点で偏微分不可能であることを示せ。

**解答**

$$\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 0^2} - \sqrt{0^2 + 0^2}}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & (h > 0) \\ -1 & (h < 0) \end{cases}$$

であるから、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-1) = -1.$$

ゆえに  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$  は存在しない。すなわち  $f$  は  $(0, 0)$  で  $x$  について偏微分可能ではない。同様に  $f$  は  $(0, 0)$  で  $y$  について偏微分可能ではないことも証明できる。■

71. 関数  $f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbf{R}$  が、変数  $x$  についていたるところ偏微分可能で、 $f_x(x, y) = 0$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) を満たすとする。このとき  $\exists g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  s.t.

$$f(x, y) = g(y) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

が成り立つことを示せ。

72.  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の領域、 $f \in C^1(\Omega)$ ,  $f_x \equiv 0$  ( $\Omega$  内) とするとき、 $f(x, y) = g(y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ) を満たす関数  $g$  は必ず存在すると結論して良いか? (成立するならば証明し、そうでなければ反例を与えよ。)

**解答** 成立しない。  $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y); y \geq 0\}$  として、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ y^2 & (y \geq 0 \text{ かつ } x < 0) \\ y^3 & (y \geq 0 \text{ かつ } x > 0) \end{cases}$$

で定めると、これが反例になる。■

## 全微分

応用上  $C^1$  級の関数が出て来る場合が多い ( $C^1$  級ならば全微分可能であることに注意)。 $C^1$  級であることを確認するには、すべての偏導関数を求めて、それらが連続であることを確認すれば良い。

73. 次の関数の微分を求めよ。(1)  $f(x, y, z) = \tan^{-1}(x + y + z)$  (2)  $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 + y^3 \end{pmatrix}$

(3)  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ (x + y)e^z \\ (y + z) \sin x \end{pmatrix}$  (4)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

## 解答

(1)  $a$  を定数とするとき、

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1}(x + a)) = \frac{1}{1 + (x + a)^2} \cdot \frac{d}{dx} (x + a) = \frac{1}{1 + (x + a)^2}$$

であるから、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x + (y + z))^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y + (z + x))^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{1 + (z + (x + y))^2}.$$

ゆえに

$$f'(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} \quad \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} \quad \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} \right).$$

(2)  $f_1(x, y) := xy$ ,  $f_2(x, y) := x^2 + y^3$  とおくとき、

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3y^2$$

であるから、

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

(3)  $f_1(x, y, z) := x + y + z$ ,  $f_2(x, y, z) := (x + y)e^z$ ,  $f_3(x, y, z) := (y + z) \sin x$ ,  $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$  と

おくとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= e^z, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= e^z, & \frac{\partial f_2}{\partial z} &= (x + y)e^z, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} &= (y + z) \cos x, & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= \sin x, & \frac{\partial f_3}{\partial z} &= \sin x \end{aligned}$$

であるから

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^z & e^z & (x+y)e^z \\ (y+z)\cos x & \sin x & \sin x \end{pmatrix} \blacksquare$$

74. 次の関数のヤコビ行列を求めよ。

$$(1) F(x, y) = \begin{pmatrix} xy e^{x+2y} \\ \tan^{-1}(x^2 - 2xy) \end{pmatrix} \quad (2) F(x, y) = \begin{pmatrix} \tan^{-1} \frac{x}{y} \\ x \end{pmatrix} \quad (3) F(x, y) = \begin{pmatrix} \log \frac{x+y}{x-y} \\ \log \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \end{pmatrix}$$

$$(4) F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (5) F(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2 + y) \\ \cos(x^3 + 2xy) \end{pmatrix} \quad (6) F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$(7) F(x, y) = (\sinh(xy), \cosh(xy))$$

**解答 (結果のみ)**

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{(x+1)ye^{x+2y}}{2(x-y)} & \frac{x(1+2y)e^{x+2y}}{-2x} \\ \frac{2x}{1+x^2(x-2y)^2} & \frac{x}{1+x^2(x-2y)^2} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \frac{-2y}{x^2-y^2} & \frac{2x}{x^2-y^2} \\ \frac{-y}{x^2-y^2} & \frac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -2x \sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \\ -(3x^2 + 2y) \sin(x^3 + 2xy) & -2x \sin(x^3 + 2xy) \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} y \cosh(xy) & x \cosh(xy) \\ y \sinh(xy) & x \sinh(xy) \end{pmatrix}$$

75. 次の関数のヤコビ行列を求めよ。

$$(1) F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2) F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ zx^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad (3) F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \\ xy \cos z \\ xy \sin z \end{pmatrix}$$

$$(4) F(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

**解答 (結果のみ)**

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & z^2 & 2yz \\ 2xz & 0 & x^2 \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} x & -y & 0 \\ y \cos z & x \cos z & -xy \sin z \\ y \sin z & x \sin z & xy \cos z \end{pmatrix}$$

76.  $\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  で定義された  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、 $F(x) = (f(x), g(x))$  で  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を定義するとき、 $F'(x)$  を求めよ。

**解答 (結果のみ)**

$$F'(x) = g(x)^T f'(x) + f(x)^T g'(x) \blacksquare$$

77. (これはテキストの例だが、自力で解けるようにしておくこと)

- (1)  $m \times n$  行列  $A = (a_{ij})$ ,  $m$  次元ベクトル  $b = (b_i)$  があるとき、 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  を  $f(x) = Ax + b$  と定める。このとき  $f$  の Jacobi 行列を計算で求めよ。
- (2)  $A$  を  $n$  次実対称行列、 $b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$  として、 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$  で定める。この時  $\nabla f(x)$  を求めよ。

**結果のみ** (1)  $f'(x) = A$  (2)  $\nabla f(x) = Ax + b$  ■

## 合成関数

78. 次の合成関数について、( ) 内のものを求めよ。

- (1)  $f(x, y) = x \sin \frac{x}{y}, x = 1 + 3t, y = \sqrt{1 + t^2}. \left(\frac{df}{dt}\right).$
- (2)  $f(x, y) = x^2 y^5 + e^{xy}, x = t, y = \frac{1}{1 + t^2}. \left(\frac{df}{dt}\right).$
- (3)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, x = t, y = 2t - 3. \left(\frac{df}{dt}\right).$
- (4)  $f(x, y) = x^2 + 2xy, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta. (f_r, f_\theta).$
- (5)  $f(x, y) = \frac{x + y}{1 - xy}, x = \sin 2t, y = \cos(3t - s). (f_t, f_s).$
- (6)  $f(x, y) = x^2 + xy - y^2, x = t + 2s, y = s - 3t. (f_t, f_s).$
- (7)  $f(x, y, z) = x^3 + 3xyz - y^2 z, x = 2t + s, y = -t - s, z = t^2 + s^2. (f_t, f_s).$
- (8)  $f(x, y, z) = \frac{x - y}{1 + xyz}, x = 3t + 2s, y = 3s - 4t, z = t. (f_t, f_s).$
- (9)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = t \cos s, y = t \sin s, z = ts. (f_t, f_s).$
- (10)  $f(x, y, z) = x^2 + xy - y^2, x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta. (f_r, f_\theta, f_\varphi).$

**答 (結果のみ)** (1)  $3 \sin \frac{1 + 3t}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \left( 3 + 9t - \frac{t(1 + 3t)^2}{1 + t^2} \right) \cos \frac{1 + 3t}{\sqrt{1 + t^2}}$

(2)  $\frac{2t(1 - 4t^2)}{(1 + t^2)^6} + \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} e^{\frac{t}{1 + t^2}}$  (3)  $\frac{4t(t - 3)}{(t^2 + 2t - 3)^2}$

(4)  $f_r(t, \theta) = 2r \cos \theta (2 \sin \theta + \cos \theta), f_\theta(r, \theta) = 2r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta)$

(5)  $f_t(s, t) = \frac{2(1 + \cos^2(3t - s)) \cos 2t - 3(1 + \sin^2 2t) \sin(3t - s)}{(1 - \sin 2t \cos(3t - s))^2},$

$f_s(s, t) = \frac{(1 + \sin^2 2t) \sin(3t - s)}{(1 - \sin 2t \cos(3t - s))^2}$  (6)  $f_t(s, t) = 5s - 22t, f_s(s, t) = 5t + 10s$

(7)  $f_t(s, t) = 6(2t + s)^2 - 28t^3 - 33t^2 s - 22ts^2 - 11s^3, f_s(s, t) = 3(2t + s)^2 - 11t^3 - 22t^2 s - 33ts^2 -$

$16s^3$  (8)  $f_t(s, t) = \frac{7 + 168t^3 - 43t^2 s + 2ts^2 + 6s^3}{(1 - t(12t^2 - ts - 6s^2))^2}, f_s(s, t) = \frac{-1 + t(5t^2 - 84ts + 6s^2)}{(1 - t(12t^2 - ts - 6s^2))^2}$

(9)  $f_t(s, t) = \pm \sqrt{1 + s^2} (t > 0 \text{ のとき } +, t < 0 \text{ のとき } -), f_s(s, t) = \frac{|t|s}{\sqrt{1 + s^2}}$

(10)  $f_r(r, \theta, \phi) = 2r \sin^2 \theta (\cos \phi - \cos \phi \sin \phi - \sin^2 \phi),$   
 $f_\theta(r, \theta, \phi) = 2r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \phi + \cos \phi \sin \phi - \sin^2 \phi),$   
 $f_\phi(r, \theta, \phi) = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - 4 \cos \phi \sin \phi - \sin^2 \phi)$

79. 2次元の極座標変換を考える。つまり  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta (r \geq 0, \theta \in \mathbf{R})$  とするとき、以下の問に答えよ。



(1) 以下のものを求めよ。

(a)  $x_r, x_\theta, y_r, y_\theta$

(b)  $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$

(c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(r, \theta)$  とするとき、 $\varphi'(r, \theta), (\varphi^{-1})'(x, y)$

(2)  $C^2$  級の関数  $f = f(x, y)$  が与えられているとき、 $g(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  で、関数  $g$  を定める。このとき、 $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$  が成り立つことを確かめよ。

**解答 (結果のみ)** (1) (a)  $x_r = \cos \theta, y_r = \sin \theta, x_\theta = -r \sin \theta, y_\theta = r \cos \theta$  (b)  $r_x = \cos \theta (= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  も可),  $r_y = \sin \theta (= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  も可),  $\theta_x = -\frac{\sin \theta}{r} (= -\frac{y}{x^2 + y^2}$  も可),  $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r} (= \frac{x}{x^2 + y^2}$  も可) (c)  $\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, (\varphi^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix})$  も可 (3) 昨年度講義ノート

(<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2010/tahensuu1-2010.pdf>) の付録 C.3 (pp. 155-159) を見よ。

## 高階導関数

80. 次の式によって定められる関数  $f$  について  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  を求めよ。

(1)  $e^{xy}$  (2)  $\sin(x^2 + 5y^3)$  (3)  $\cosh(xy)$  (4)  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  (5)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

**解答 (結果のみ)** (1)  $y^2 e^{xy}, (1 + xy)e^{xy}, x^2 e^{xy}$

(2)  $2(\cos(x^2 + 5y^3) - 2x^2 \sin(x^2 + 5y^3)), -30xy^2 \sin(x^2 + 5y^3), 30y \cos(x^2 + 5y^3) - 225y^4 \sin(x^2 + 5y^3)$  (3)  $y^2 \cosh(xy), xy \cosh(xy) + \sinh(xy), x^2 \cosh(xy)$  (4)  $\frac{2y}{x^3}, -\frac{1}{x^2}, 0$  (5)  $-\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

81. 次の式によって定められる関数  $f$  について、 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  を求めよ。

(1)  $x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$  (2)  $\sin x \cos y$  (3)  $\sinh(xy)$  (4)  $\cosh(xy)$  (5)  $e^{xy}$  (6)  $e^{x+y}$  (7)  $e^{x^2+y^2}$  (8)  $\sin(xy)$  (9)  $\sin(x^2 + y^2)$

**解答 (結果のみ)** (1)  $f_{xx} = 12x^2 + 8y^3, f_{xy} = 24xy^2 + 7, f_{yy} = 24x^2y$  (2)  $f_{xx} = -\sin x \cos y, f_{xy} = -\cos x \sin y, f_{yy} = -\sin x \cos y$  (3)  $f_{xx} = y^2 \sinh(xy), f_{xy} = \cosh(xy) + xy \sinh(xy), f_{yy} = x^2 \sinh(xy)$  (4)  $f_{xx} = y^2 \cosh(xy), f_{xy} = xy \cosh(xy) \sinh(xy), f_{yy} = x^2 \cosh(xy)$  (5)  $f_{xx} = y^2 e^{xy}, f_{xy} = (1 + xy)e^{xy}, f_{yy} = x^2 e^{xy}$  (6)  $f_{xx} = e^{x+y}, f_{xy} = e^{x+y}, f_{yy} = e^{x+y}$  (7)  $f_{xx} = 2(1 + 2x^2)e^{x^2+y^2}, f_{xy} = 4xye^{x^2+y^2}, f_{yy} = 2(1 + 2y^2)e^{x^2+y^2}$  (8)  $f_{xx} = -y^2 \sin(xy), f_{xy} = -xy \sin(xy), f_{yy} = -x^2 \sin(xy)$  (9)  $f_{xx} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2), f_{xy} = -4xy \sin(x^2 + y^2), f_{yy} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$

82. 次の式によって定められる関数  $f$  について  $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}$  を求めよ。

- (1)  $xyz$  (2)  $e^{xyz}$  (3)  $\sin(xyz)$  (4)  $x^2y^2z^2+xz^5$  (5)  $yz+zx+xy$  (6)  $e^{x+y+z}$  (7)  $\sin(x+y+z)$   
 (8)  $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

**解答 (結果のみ)** (1)  $f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{zz} = 0, f_{yz} = x, f_{zx} = y, f_{xy} = z$  (2)  $f_{xx} = y^2z^2e^{xyz}, f_{yy} = z^2x^2e^{xyz}, f_{zz} = x^2y^2e^{xyz}, f_{yz} = x(1+xyz)e^{xyz}, f_{zx} = y(1+xyz)e^{xyz}, f_{xy} = z(1+xyz)e^{xyz}$  (3)  $f_{xx} = -y^2z^2\sin(xyz), f_{yy} = -z^2x^2\sin(xyz), f_{zz} = -x^2y^2\sin(xyz), f_{yz} = x(\cos(xyz) - xyz\sin(xyz)), f_{zx} = y(\cos(xyz) - xyz\sin(xyz)), f_{xy} = z(\cos(xyz) - xyz\sin(xyz))$  (4)  $f_{xx} = 2y^2z^2, f_{yy} = 2z^2x^2, f_{zz} = 2x^2y^2+20xz^3, f_{yz} = 4x^2yz, f_{zx} = 4xy^2z+5z^4, f_{xy} = 4xyz^2$  (5)  $f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{zz} = 0, f_{yz} = 1, f_{zx} = 1, f_{xy} = 1$  (6)  $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f_{yz} = f_{zx} = f_{xy} = e^{x+y+z}$  (7)  $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f_{yz} = f_{zx} = f_{xy} = -\sin(x+y+z)$  (8)  $f_{xx} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, f_{yy} = \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, f_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, f_{yz} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, f_{zx} = -\frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

83. 次の関数について  $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$  が成り立つことを示せ。

- (1)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$  (2)  $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$  (3)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

84.  $u = x + y, v = x - y$  とする。  $C^2$  級の関数  $f(x, y)$  に対し、次の式を示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

85.  $g(t)$  を  $C^2$  級関数の 1 変数関数,  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$  として、次の式を示せ。

$$f_{xx} + f_{yy} = 4(x^2 + y^2)g''(x^2 + y^2) + 4g'(x^2 + y^2).$$

86.  $\mathbf{R}^2$  で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について、以下の問に答えよ。

- (1)  $f_x, f_y$  を求めよ。 (2)  $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx}(0, 0) = 1$  であることを示せ。

**解答**

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h}.$$

$f_x(0, 0)$  については、定義に戻って

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( h \cdot 0 \cdot \frac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2} - 0 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

$h \neq 0$  のときの  $f_x(0, h)$  を求めるには、やり方が 2 つある。一つは、積の微分法と商の微分法を用いて得られる

$$f_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

に  $(x, y) = (0, h)$  を代入するというもの<sup>1</sup>。もう一つは、これも微分係数の定義式に戻って

$$f_x(0, h) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0+k, h) - f(0, h)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left( kh \frac{k^2 - h^2}{k^2 + h^2} - 0 \right) = \lim_{k \rightarrow 0} h \frac{k^2 - h^2}{k^2 + h^2} = h \frac{0^2 - h^2}{0^2 + h^2} = -h$$

とするもの (普通はこちらは面倒になる場合が多いと思われるが、この問題の場合は案外簡単)。ゆえに

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

後半は前半と同様だが、結構ミスをしている人もいたので書いておく。

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h}.$$

$$\begin{aligned} f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( 0 \cdot h \cdot \frac{0^2 - h^2}{0^2 + h^2} - 0 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

$h \neq 0$  のときの  $f_y(h, 0)$  を求めるには、

$$f_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

に  $(x, y) = (h, 0)$  を代入するか<sup>2</sup>、微分係数の定義式に戻って

$$f_y(h, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, 0+k) - f(h, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left( hk \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - 0 \right) = h \frac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2} = h$$

とする。ゆえに

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \blacksquare$$

87.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \frac{\partial f}{\partial y} = x$  を満たす  $C^2$  級の関数  $f$  は存在しないことを示せ。

**解答**  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$  で  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . もし  $f$  が  $C^2$  級ならば  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  が成り立ち、矛盾が生じるので、 $f$  は  $C^2$  級ではありえない。■

88.  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定めるとき、 $f_{xy}(0, 0)$  と  $f_{yx}(0, 0)$  を求めよ。

<sup>1</sup> $f_x$  は整理すると、 $\frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$  となるが、整理する必要はないだろう。

<sup>2</sup> $f_y$  は整理すると、 $\frac{x(y^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$  となる。

解答 まず

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0^3 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

それから

$$f_x(x,y) = \frac{x^2 y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)), \quad \text{特に} \quad f_x(0,y) = \frac{0^2 \cdot y(0^2 + 3y^2)}{(0^2 + y^2)^2} = 0 \quad (y \neq 0),$$
$$f_y(x,y) = \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)), \quad \text{特に} \quad f_x(x,0) = \frac{x^3(x^2 - 0^2)}{(x^2 + 0^2)^2} = x \quad (x \neq 0).$$

これから

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \blacksquare$$

89. 次の式で定義される  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + x - y & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

(1)  $f_x(0,0)$  と  $f_y(0,0)$  を求めよ。 (2)  $f$  は  $C^1$  級であることを示せ。 (3)  $f_{xy}(0,0)$  と  $f_{yx}(0,0)$  を求めよ。 (4)  $f$  は  $C^2$  級であるかどうか答えよ。

解答 (1)  $h \neq 0$  とするとき  $f(h,0) = h$ ,  $f(0,h) = -h$  であるから、

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

(2)  $(x,y) \neq (0,0)$  のとき、

$$f_x(x,y) = 1 + \frac{y(x^4 + 3x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = -1 + \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

であるから、 $(x,y) \rightarrow (0,0)$  のとき

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| = |y| \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2 y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} = |y| \rightarrow 0,$$
$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| = |x| \frac{x^2 |x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \leq |x| \frac{(x^2 + y^2)(|x^2| + |y^2|)}{(x^2 + y^2)^2} = |x| \rightarrow 0.$$

すなわち

$$\lim_{\substack{(x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f_x(x,y) = f_x(0,0), \quad \lim_{\substack{(x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

ゆえに  $f_x, f_y$  とともに  $(0, 0)$  で連続である。

(3)  $h \neq 0$  に対して、

$$f_x(0, h) = 1 + \frac{h(0^4 + 3 \cdot 0^2 h^2)}{(0^2 + h^2)^2} = 1, \quad f_y(h, 0) = -1 + \frac{h^3(h^2 - 0^2)}{(h^2 + 0^2)^2} = -1 + h$$

であるから、

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h) - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(3) もし  $f$  が  $C^2$  級ならば  $f_{xy} = f_{yx}$  が成り立つはずであるが、(2) よりそうではないから、 $f$  は  $C^2$  級ではない。■

## $C^1$ 級、微分可能性、偏微分可能性、連続性のチェック

90. 正定数  $p$  に対して、 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  で定義するとき、以下の間に答えよ。(1)  $f$  は  $\mathbf{R}$  で連続か？(2)  $f$  は  $\mathbf{R}$  で微分可能か？(3)  $f$  は  $\mathbf{R}$  で  $C^1$  級か？

**解答** まず  $\mathbf{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbf{R}; x \neq 0\}$  で  $f$  は何回でも微分出来る ( $x > 0$  の範囲で明らかに  $C^\infty$  級であり、また  $f$  は奇関数であるので、 $x < 0$  の範囲でも  $C^\infty$  級である)。特に連続、微分可能、 $C^1$  級である。それで問題は  $x = 0$  においてどうかである。

(1) 連続性は次のようにして分かる。  $|\sin(1/x)| \leq 1$  から

$$|f(x)| = |x|^p \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^p \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

(2) 微分可能性については、

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^p \sin \frac{1}{h}}{h}$$

が存在するかという問題である。まず  $p > 1$  の場合は  $0$  という極限を持つ。 $0 < p \leq 1$  の場合には極限がない。ゆえに  $p > 1$  の場合のみ微分可能 ( $f'(0) = 0$ )、そうでない場合は微分可能でない。

(3)  $C^1$  級かどうかについて。まず  $p \leq 1$  の場合は (微分可能でないのだから) 明らかに  $C^1$  級でない。以下  $p > 1$  とする。まず  $x > 0$  の場合を考えよう。

$$f'(x) = (p-1)x^{p-1} \sin \frac{1}{x} + x^p \cos \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = (p-1)x^{p-1} \sin \frac{1}{x} - x^{p-2} \cos \frac{1}{x}$$

右辺第 1 項は  $x \rightarrow +0$  のとき  $0$  に収束するが、右辺第 2 項については、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p-2} \cos \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 & (p > 2 \text{ の場合}) \\ \text{極限なし} & (1 < p \leq 2 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$x < 0$  の場合も含めてまとめると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \begin{cases} 0 = f'(0) & (p > 2 \text{ の場合}) \\ \text{極限なし} & (1 < p \leq 2 \text{ の場合}) \end{cases}$$

ゆえに  $p > 2$  の場合  $f$  は  $C^1$  級で、 $0 < p \leq 2$  の場合は  $C^1$  級でない。■

( $p = 2$  のとき、 $f$  は微分可能であるが、 $C^1$  級ではない関数となり、微積のテキストに例として良く採用されている。)

91. 2回微分可能だが、 $C^2$  級でない関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  の例をあげよ。

92. 全微分可能だが、 $C^1$  級でない関数  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  の例をあげよ。

## 例題

次の各関数は、 $(x, y) \neq (0, 0)$  の範囲で  $C^\infty$  級であることは明らかであるが、 $\mathbf{R}^2$  全体で (a) 連続である、(b) 各変数につき偏微分可能である、(c) 全微分可能である、(d)  $C^1$  級である、の各条件を満たすかどうか調べよ。

(1)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

(3)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

(4)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

(5)  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

**解答** どの条件を満たすか、結果だけ先に書いておこう。(1) (a) (2) (b) (3) (a), (b) (4) (a), (b), (c) (5) (a), (b), (c), (d) となる。

(1)  $g(t) = \sqrt{t}$  ( $t \geq 0$ ),  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) は連続であり、 $f = g \circ \varphi$ .  $f$  は連続関数の合成関数なので連続である。しかし極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

は存在しないので、 $f$  は  $(0, 0)$  で  $x$  について偏微分可能でない。「全微分可能ならば各変数について偏微分可能」であるから、全微分可能ではない。「 $C^1$  とは、各変数につき偏微分可能で、偏導関数がすべて連続のこと」であるから、 $C^1$  級でない。

- (2)  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y)$  は存在しないので (これは講義でやった。  $y = kx$  に沿った極限が食い違うから、が理由。別のやり方として、  $|f(x,y) - f(0,0)|$  が 0 に収束しないことを確かめる方法がある)、  $f$  は  $(0,0)$  で連続ではない。

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h}{0^2 + h^2} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから、  $f$  は  $(0,0)$  で  $x, y$  のそれぞれについて偏微分可能。「全微分可能ならば連続」であるから、全微分可能ではない。「 $C^1$  級ならば全微分可能」であるから、 $C^1$  級でない。

- (3)  $(x,y) \neq (0,0)$  のとき、

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |x| \sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2}} \leq |x| \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = |x|$$

で、  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  のとき、  $|x| \rightarrow 0$  であるから、

$$|f(x,y) - f(0,0)| \rightarrow 0, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

ゆえに  $f$  は  $(0,0)$  で連続である。

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2 + 0^2}} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h}{\sqrt{0^2 + h^2}} - 0 = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから、  $f$  は  $(0,0)$  で、  $x$  と  $y$  のそれぞれについて偏微分可能である。  $(x,y) \neq (0,0)$  とするとき、

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

であるが、これは  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  のとき 0 に収束しない。ゆえに  $f$  は  $(0,0)$  で全微分可能ではない。「 $C^1$  級ならば全微分可能」なので  $C^1$  級ではない。

- (4)  $\left| h \sin \frac{1}{|h|} \right| \leq |h| \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) に注意すると、

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 0^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + 0^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0^2 + h^2) \sin \frac{1}{\sqrt{0^2 + h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

であるから、 $f$  は  $(0, 0)$  で、 $x$  と  $y$  のそれぞれについて偏微分可能である。 $(x, y) \neq (0, 0)$  とするとき、

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 - 0 \cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき、 $\left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$  であるから、(はさみうちの原理によって)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

ゆえに  $f$  は  $(0, 0)$  で全微分可能である。一方、 $(x, y) \neq (0, 0)$  とするとき、

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x^2 + y^2)^{-1/2} \right] \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

であるから、

$$f_x(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}.$$

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow +0} f_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} \left( 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

これは極限が存在しない。従って、 $f_x(x, y)$  は  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき  $f_x(0, 0)$  には収束しない。ゆえに  $f$  は  $C^1$  級ではない。

(5)

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f$  は  $(0, 0)$  で  $x$  と  $y$  のそれぞれについて偏微分可能である。 $(x, y) \neq (0, 0)$  とするとき、

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

であるが、

$$|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|y| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \rightarrow 0,$$

$$|f_y(x, y) - f_y(0, 0)| \leq |x| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|x| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|x| \rightarrow 0$$

であるから、 $C^1$  級である。一般に「 $C^1$  級ならば全微分可能」であるから、全微分可能である。



## 解説&お説教(?)

- (a),(b),(c),(d) の定義と、 $(d) \implies (c)$ ,  $(c) \implies (a)$ ,  $(c) \implies (b)$  が成り立つことはしっかりマスターしておくこと。
- 極限の計算がきちんと出来ること。はさみうちの原理を使うために不等式にも慣れる必要がある。(これらは、例や例題の解答を熟読して、分からないことがあれば、それを解消しておく努力が必要である。)
- 諸君の先輩達の期末試験の答案を見ると、不等式の扱いがめちゃくちゃであるものが多い。
  - 平然と  $x^2 \leq x^3$  とか  $y^2 \leq y^4$  とする人がいるが(指数が大きい方が大きいと信じている?)、無条件では成立しない。 $x$  が正とは限らない( $x < 0$  ならば  $x^3 < 0 < x^2$  である)。またそもそも  $x, y$  は 0 に近づけることが多いので、どちらかというとき逆であろう。例えば  $0 < x < 1$  ならば

$$0 < a < b \implies x^a > x^b.$$

この場合、正しくは  $x^2 \geq |x^3|$ ,  $y^2 \geq y^4$  ( $x, y$  が十分 0 に近いとき)

- はさみうちの原理を誤解しているケース。 $(x, y) \rightarrow (a, b)$  のとき

$$|f(x, y) - A| \leq g(x, y), \quad g(x, y) \rightarrow 0$$

が示されれば、 $-g(x, y) \leq f(x, y) - A \leq g(x, y)$  の両辺が 0 に収束することから、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A$  が言える。絶対値抜きの  $f(x, y) - A \leq g(x, y) \rightarrow 0$  では、はさめない! また  $g(x, y) \not\rightarrow 0$  が分かったからと言って、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A$  でないとは結論できない(大きい方が 0 に収束しなくても、小さい方は 0 に収束するかも知れないでしょう? 単に  $g(x, y)$  の取り方がまずくて、 $|f(x, y) - A| \leq g(x, y)$  の評価が甘すぎるのかもしれない。)。■

- $f$  が  $a$  で全微分可能であるとは、ある行列  $A$  が存在して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つこと、と講義で定義してあるが、このままではチェックしづらい。 $f$  が  $a$  で全微分可能であるためには、 $f$  が  $a$  で各変数について偏微分可能であり、かつヤコビ行列  $A := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$  に対して、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \quad (\star)$$

が成り立つことが必要十分である。こちらの方がチェックしやすい。 $f$  が 2 変数の実数値関数であれば、 $(\star)$  は

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

と書き換えられる。

93. 次の各関数は、 $(x, y) \neq (0, 0)$  の範囲で  $C^\infty$  級であることは明らかであるが、 $\mathbf{R}^2$  全体で (a) 連続である, (b) 各変数につき偏微分可能である, (c) 全微分可能である, (d)  $C^1$  級である, の各条件を満たすかどうか調べよ。

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 1 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & ((x, y, z) \neq (0, 0, 0)) \\ 0 & ((x, y, z) = (0, 0, 0)) \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 1 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

$$(4) f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(5) f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(6) f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

**解答** (1)  $f$  は  $(0, 0)$  で連続でない。なぜならば

$$f(x, y) - f(0, 0) = \dots = \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2} = x + \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

であり、これは  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  のとき 0 に収束しないから。当然、 $f$  は全微分可能でも、 $C^1$  級でもない。一方  $f$  は  $x, y$  について偏微分可能で、 $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 0$ 。

(2)  $x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{y^2 z^2} = 2|yz|$  であるから、 $\frac{|yz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{2}$ 。ゆえに

$$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| = \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{|x|}{2}$$

なので、 $f$  は連続である。 $f_x(0, 0, 0) = f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = 0$  となるので、偏微分可能。これから

$$\frac{f(x, y, z) - f(0, 0, 0) - f_x(0, 0, 0)x - f_y(0, 0, 0)y - f_z(0, 0, 0)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

この極限は存在しないので、 $f$  は全微分可能ではない。ゆえに  $f$  は  $C^1$  級でもない。

(3) 昨年度講義ノート<sup>3</sup> の付録 pp.154–155 を見よ。

(4) 曲線  $x = ky^2$  ( $k$  は定数) にそって  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  としたときの極限を考えると、結果が  $k$  によることから、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  は存在しない。ゆえに  $f$  は連続ではない。当然、全微分可能でもないし、 $C^1$  級でもない。一方、 $f$  は  $x$  と  $y$  のそれぞれについて偏微分可能である (実

<sup>3</sup><http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2010/tahensuu1-2010.pdf>

際  $f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$ 。

(5)  $f$  は連続である。実際、

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x| \cdot x^2}{x^2 + y^2} + \frac{|y| \cdot y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \rightarrow 0.$$

また

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 0^3}{h^2 + 0^2} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0^3 + h^3}{0^2 + h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

であるから偏微分可能。

$$\begin{aligned} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 - 1 \cdot x - 1 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= -\frac{xy(x+y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

は 0 に収束しないので ( $y = kx$  テクニック!),  $f$  は  $(0,0)$  で全微分可能ではない。ゆえに  $f$  は  $\mathbf{R}^2$  で  $C^1$  級でもない。

(6) 連続である。  $f_x(0,0) = 1, f_y(0,0) = -1$  であり偏微分可能。

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x^3 + x^4 + x^2y - xy^2 + y^3 - y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

は  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  のとき極限を持たない。ゆえに  $f$  は  $(0,0)$  で全微分可能ではない。ゆえに  $f$  は  $\mathbf{R}^2$  で  $C^1$  級でもない。 ■

## 極座標

94.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$  とするとき、以下のものを求めよ。

(a)  $\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}$  (b) ヤコビアン  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$  (c) 逆写像のヤコビ行列  $\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix}$

((a),(b) は必修。(c) は出来なくてもよいが、(a) の各列ベクトルが直交していることに気づけばそれほど難しくない)。

## 解答

(a)

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(b) 3 次なので Sarrus の規則を使って計算することもできる。ここでは第 3 列で展開してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}(-r \sin \theta \sin \phi) \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3}(r \sin \theta \cos \phi) \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \cdot r \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} - r \sin \theta \cos \phi \cdot r \cos \phi \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin \theta \cos^2 \phi = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

(c) (a) の結果を  $(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$  と書くと、簡単な計算で (目で見ても暗算で内積を計算して確認できるレベル)、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  は互いに直交していることが分かる。また

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi)^2 + (\cos \theta)^2 = 1, \\ (\mathbf{b}, \mathbf{b}) &= (r \cos \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta \sin \phi)^2 + (-r \sin \theta)^2 = r^2, \\ (\mathbf{c}, \mathbf{c}) &= (r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi)^2 = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{a} & \mathbf{a}^T \mathbf{b} & \mathbf{a}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{a} & \mathbf{b}^T \mathbf{b} & \mathbf{b}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{a} & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

第 2 行を  $r^2$ , 第 3 行を  $r^2 \sin^2 \theta$  で割れば、単位行列になる:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \frac{1}{r^2} \mathbf{b}^T \\ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{c}^T \end{pmatrix} (\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \frac{1}{r^2} \mathbf{b}^T \\ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{c}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} & -\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

95. 地球の表面上にある 2 点の緯度経度が分かっているときに、その 2 点間の (表面に沿っての最短の) 道のりの長さの求め方を説明せよ (ただし地球は球であるとする)。具体的な問題が欲しければ、アレクサンドリアの図書館 (北緯  $31^\circ 12' = 31.20^\circ$ , 東経  $29^\circ 55' = 29.91^\circ$ ) と生田キャンパス (北緯  $35^\circ 37' = 35.61^\circ$ , 東経  $139^\circ 33' = 139.55^\circ$ ) の地球表面に沿った道のりの長さを求めよ。

**解説** (この手の問題は、大昔ならば球面三角法として、講義もされたのだろうけれど、現在ではベクトルの計算で簡単にできることとして、逆にあまり説明されないのかも… 参考まで) 極座標と直交座標 (デカルト座標) の関係式を理解していれば、緯度、経度から直交座標を求める式は導けるはず (省略)。後は、地球の中心から二点  $\vec{x}, \vec{y}$  を見込む角  $\theta$  を  $\cos \theta = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$

で算出して、道のり =  $R\theta$  ( $R$  は地球の半径) とすれば良い。■

96.  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (y, z) \neq (0, 0)$  に対して、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \sin \theta \sin \phi, \quad r \in (0, \infty), \theta \in (0, \pi), \phi \in [0, 2\pi)$$

を満たす  $(r, \theta, \phi)$  が一意に定まることを示せ。また、この式で  $\varphi: (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) \ni (r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  を定めるとき、 $\varphi'(r, \theta, \phi)$  と、 $\det \varphi'(r, \theta, \phi)$  を求めよ。

**解答** まず  $r$  は  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  で求まる。 $(y, z) \neq 0$  としてあるので、 $r > 0$  に注意すると、 $\theta$  は  $\theta = \cos^{-1} \frac{x}{r}$  で求まる。 $(y, z) \neq (0, 0)$  から  $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$  であるので、 $|x|/r < 1$  より  $\theta \neq 0, \pi, \sin \theta > 0$  に注意すると、 $(\cos \phi, \sin \phi) = \left( \frac{y}{r \sin \theta}, \frac{z}{r \sin \theta} \right)$  から、 $\phi \in [0, 2\pi)$  が定まる。後半は普通の極座標とほぼ同じである。

$$\varphi'(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}.$$

$$\det \varphi'(r, \theta, \phi) = (\text{途中略}) = r^2 \sin \theta. \blacksquare$$

(この問題の式は、いわば  $(1, 0, 0)$  を北極にした極座標である。これは試験のために作ったわざとらしい式ではなくて、世の中にかかなり流布している式である。すいすい使いこなせなければいけない。)

97.  $f(r, \phi, \lambda) := \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \lambda \\ r \cos \phi \sin \lambda \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$  とするとき  $\det f'(r, \phi, \lambda)$  を求めよ。(いわゆる緯度経度方式である。 $\phi$  が緯度 (latitude),  $\lambda$  が経度 (longitude) に相当する。)

**解答**  $f'(r, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -r \sin \phi \cos \lambda & -r \cos \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda & -r \sin \phi \sin \lambda & r \cos \phi \cos \lambda \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$  である。 $\det f'(r, \phi, \lambda) = -r^2 \cos \phi$ .

■

## グラフ, 接平面, 法線

98. 次の関数のグラフの、与えられた点における接平面を求めよ。

(1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ),  $(x, y) = (a, b)$

(2)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ),  $(x, y) = (a, b)$

(3)  $3x^2 - 4y$ ,  $(x, y) = (1, 2)$

$$(4) \sqrt{14 - x^2 - y^2}, (x, y) = (-1, -2)$$

$$(5) \sqrt{17 - 5x^2 - 4y^2}, (x, y) = (-1, 1)$$

$$(6) (x^2 + y^2)^{1/3}, (x, y) = (2, -2)$$

$$(7) e^x \sin y, (x, y) = (-\log \pi, \pi/2)$$

$$(8) \sin(xy), (x, y) = (\sqrt{2}\pi, -2\sqrt{2})$$

**解答 (結果のみ)**  $f$  のグラフ  $z = f(x, y)$  の、 $(a, b)$  における接平面の方程式は、 $z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$  である。

$$(1) z = \frac{2}{a}x + \frac{2}{b}y - 2 \quad (2) z = \frac{2}{a}x - \frac{2}{b}y \quad (3) z = 6x - 4y - 3$$

$$(4) x + 2y - 3z + 14 = 0 \quad (5) 5x - 4y - 2\sqrt{2}z + 17 = 0 \quad (6) x - y - 3z + 2 = 0$$

$$(7) x - \pi z + \log \pi + 1 = 0 \quad (8) z = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}\pi y + 8\pi$$

**99.** 次の2変数関数  $f$  について、 $\text{grad } f$  を求め、等高線を何本か描き、この  $\text{grad } f$  は等高線と直交することを確かめよ。(1)  $f(x, y) = x + 2y$ . (2)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

**100.** 次の曲面の接平面と法線を求めよ。

$$(1) z = xy(x^2 + y^2 - 4). \text{ 点 } (1, 2, 2) \text{ で. } (2) \cos(x + y + z) = 0. \text{ 点 } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ で.}$$

$$(3) \sin x + y^2 + z^2 = 2. \text{ 点 } \left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right) \text{ で.}$$

**解説** 3変数関数  $F(x, y, z)$  のレベルセット  $\{(x, y, z); F(x, y, z) = h\}$  ( $h$  はある実数) 上の点  $(a, b, c)$  における接平面は

$$\nabla F(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} = 0, \quad \text{すなわち} \quad F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

で与えられる。また  $(a, b, c)$  における法線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \nabla F(a, b, c) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} F_x(a, b, c) \\ F_y(a, b, c) \\ F_z(a, b, c) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

で与えられる。

3次元空間内の曲面は、コンピューターで描くことが出来る(場合がある)。数式処理系の **Mathematica** は有名だが、グラフ描画用のフリーソフトである **gnuplot** が案外便利である(曲面はどの方向から見るかで、分かりやすくも分かりにくくなるが、gnuplot では、マウスを使って曲面を「動かす」こと<sup>4</sup>が出来るので、様子が分かりやすい。印刷してしまうと今一つ分かりづらくて残念。)

<sup>4</sup>本当は、視点を変化させていると言うべきだろうけれど、マウスで「つかんで」いると「動かして」いるような気になる。

## 解答

- (1)  $F(x, y, z) := xy(x^2 + y^2 - 4) - z = x^3y + xy^3 - 4xy - z$  とおくと、方程式  $F(x, y, z) = 0$  は与えられた曲面を表す。

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^3 - 4y \\ x^3 + 3xy^2 - 4x \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla F(1, 2, 2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 2^3 - 4 \cdot 2 \\ 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

接平面は、 $(1, 2, 2)$  を通り、 $(6, 9, -1)$  に垂直だから

$$6 \cdot (x - 1) + 9 \cdot (y - 2) - 1(z - 2) = 0$$

で与えられる。整理して  $6x + 9y - z = 22$ 。(別解  $f(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 4)$  とおく。 $z = f(x, y)$  の  $(x, y) = (1, 2)$  における接平面は、 $z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2)$  で、これに  $f(1, 2) = 2$ ,  $f_x(1, 2) = 6$ ,  $f_y(1, 2) = 9$  を代入すると、 $z = 2 + 6(x - 1) + 9(y - 2)$  で、整理して  $z = 6x + 9y - 22$ .)

一方、法線は、 $(1, 2, 2)$  を通り、 $(6, 9, -1)$  に平行だから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

なお、この直線は、方程式  $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z-2}{-1}$  でも表せる。

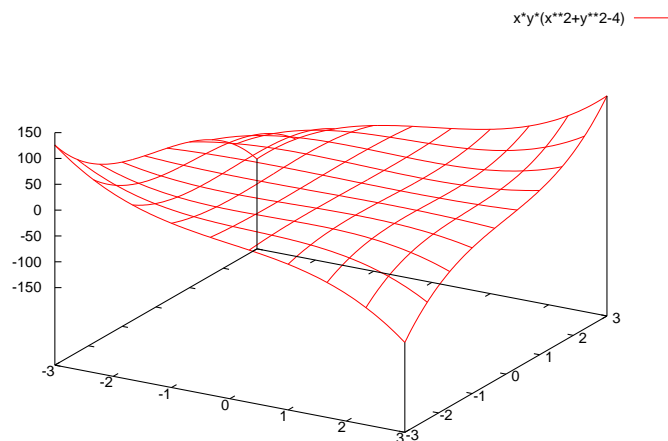


図 1: (1) gnuplot で `splot [-3:3] [-3:3] x*y*(x**2+y**2-4)`

マウスでつかんでグリグリ動かすと感じが分かるのだけど…

- (2) これは実は微積分を使わないでも解ける。 $\cos(x + y + z) = 0$  は、 $x + y + z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) と解けて、無限枚の平面を表す。特に  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$  を通るのは、 $n = 0$  に対応している  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$  であり、接平面はこれそのものとなる。

一応、推奨手順にのっとってやろう。 $F(x, y, z) := \cos(x + y + z)$  とおくと、方程式  $F(x, y, z) = 0$  は与えられた曲面を表す。

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x + y + z) \\ -\sin(x + y + z) \\ -\sin(x + y + z) \end{pmatrix} = -\sin(x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

接平面は、 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$  を通り、 $(-1, -1, -1)$  に垂直なので、

$$-1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \cdot \left(y - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \cdot \left(z - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

で与えられる。整理して  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 。

法線は、 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$  を通り、 $(-1, -1, -1)$  に平行なので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

で与えられる。このままでも良いが、 $(\frac{\pi}{6} - t$  を  $s$  と置いて)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R}).$$

と書き直すこともできる。

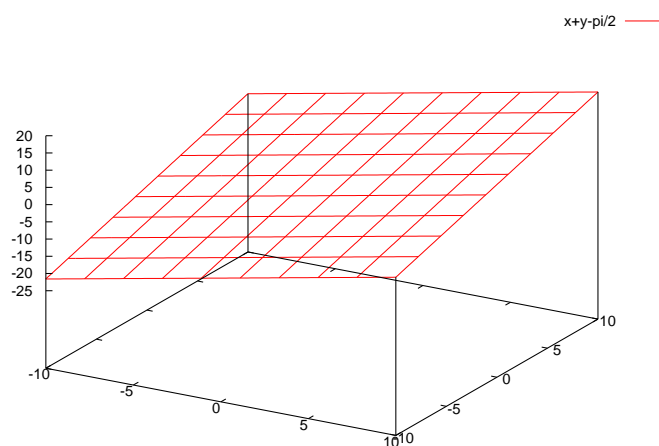


図 2: (2) gnuplot で `splot x+y-pi/2`

問題の点を含む 1 枚分だけ描いた



(3)  $F(x, y, z) := \sin x + y^2 + z^2 - 2$  とおくと、方程式  $F(x, y, z) = 0$  は与えられた曲面を表す。

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

接平面は、 $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$  を通り、 $(0, 2, 0)$  に垂直なので、

$$0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 0) = 0$$

で与えられる。整理して  $y = 1$ . 法線は、 $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$  を通り、 $(0, 2, 0)$  に平行なので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

で与えられる。このままでも良いが  $(1 + 2t)$  を  $s$  と置いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R})$$

と書き直すことも出来る。

(このグラフはどうやって描けばいいかなあ…  $y$  または  $z$  について解いて関数のグラフとすることは出来るけれど。この辺は「陰関数定理」に入ってから説明します。) ■

101.  $\mathbf{R}^2$  上の関数  $f(x, y) = 6x^2 - xy^3 + 2y^4$  のグラフ  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = f(x, y)\}$  上の点  $(1, 1, 7)$  における接平面と法線を求めよ。

**解答**

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) = 11(x - 1) + 5(y - 1) + 7 = 11x + 5y - 9.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}). \blacksquare$$

102.  $r$  を正定数とするとき、 $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$  とおく。(1)  $\nabla f(x, y)$  を求めよ。  
(2) 曲面  $z = f(x, y)$  上の点  $(a, b, c)$  における接平面を求めよ。

**解答** (1)  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$  (2)  $ax + by + cz = r^2$  ■

103. 曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a, b, c$  は正の定数) 上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  における接平面の方程式を求めよ。

解答  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$ . ■

104. (0) 曲線  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  上の点  $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$  における接線を求めよ。(1) 曲線  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  の傾き  $-1$  の接線を求めよ。(2) 曲面  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$  と平面  $x + y + z = k$  が接するような実数  $k$  の値を求めよ。

解答

(0)  $F(x, y) := \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$  とおく。

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{3} \\ y \end{pmatrix}, \quad \nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$  における接線は、この点を通り、 $\nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$  を法線ベクトルに持つので、

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 1 \cdot (y - 1) = 0.$$

整理して、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x + y - 2 = 0. \quad \left(y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x + 2\right)$$

(1)  $F(x, y) := \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$  とおく。求める接線の接点を  $(x_0, y_0)$  とすると、これが曲線  $F(x, y) = 1$  上にあることから、

$$\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} = 1. \quad (1.1)$$

一方、 $\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{3} \\ y_0 \end{pmatrix}$  であるから、接線の方程式は、

$$\frac{2x_0}{3}(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{x_0x}{3} + \frac{y_0y}{2} = \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} = 1. \quad (1.2)$$

$\nabla F(x_0, y_0)$  は、曲線  $F(x, y) = 1$  の  $(x_0, y_0)$  における (1つの) 法線ベクトルである。接線の傾きが  $-1$  とは、法線ベクトルが  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  に平行、ということであるから、 $\exists t \in \mathbf{R}$  s.t.

$$\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{3} \\ y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad (x_0, y_0) = \left(\frac{3t}{2}, t\right). \quad (1.3)$$

(1.1), (1.3) を連立方程式として解いて、 $(t, x_0, y_0) = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 。これを (1.2) に代入して、

$$x + y = \sqrt{5}, \quad x + y = -\sqrt{5}.$$

- (2)  $F(x, y, z) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4}$  とおき、 $F(x, y, z) = 1$  の接平面で、法線ベクトルが  $(1, 1, 1)$  に平行なものを求める。上と同様に

$$\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{3} + \frac{z_0^2}{4} = 1,$$

$$\exists t \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \left( x_0, \frac{2y_0}{3}, \frac{z_0}{2} \right) = t(1, 1, 1).$$

これを解いて  $(t, x_0, y_0, z_0) = \pm \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right) \cdot (x_0, y_0, z_0)$  における接平面の方程式

$$x_0(x - x_0) + \frac{2y_0}{3}(y - y_0) + \frac{z_0}{2}(z - z_0) = 0$$

に代入して、

$$x + y + z = 3, \quad x + y + z = -3.$$

ゆえに  $k = \pm 3$ . ■

図形的 (直観的) 考察から、 $(x, y, z)$  が曲面  $F(x, y, z) = 1$  上を動くときの  $f(x, y, z)$  の最大値は 3 ( $(x, y, z) = (2/3, 1, 4/3)$  のとき)、最小値は  $-3$  ( $(x, y, z) = (-2/3, -1, -4/3)$  のとき) である。このことの厳密な解答は、条件つき極値問題を学ぶと可能になる。

**図示してみよう** (1) の答の接線 ( $x + y = \sqrt{5}$ ,  $x + y = -\sqrt{5}$ ) を、曲線と一緒に描くと、図 3 のようになる。

これら接線の  $y$  切片 ( $y = -x + b$  の形にしたときの  $b$  のこと — 実は  $k$  ですね) が、 $x + y$  ( $(x, y)$  は  $F(x, y) = 1$  を満たす) の最大値と最小値を与える。分かってもらえると良いのだけれど…(昔は、こういう問題が高校数学にあったのですが、今はどうなのでしょう。)

(2) は空間図形の話になるので、若干分かりにくくなりますが、本質的には同じことです (楕円の接線の代わりに、楕円面の接平面になる)。図 4 に楕円面とその接平面を描きました。

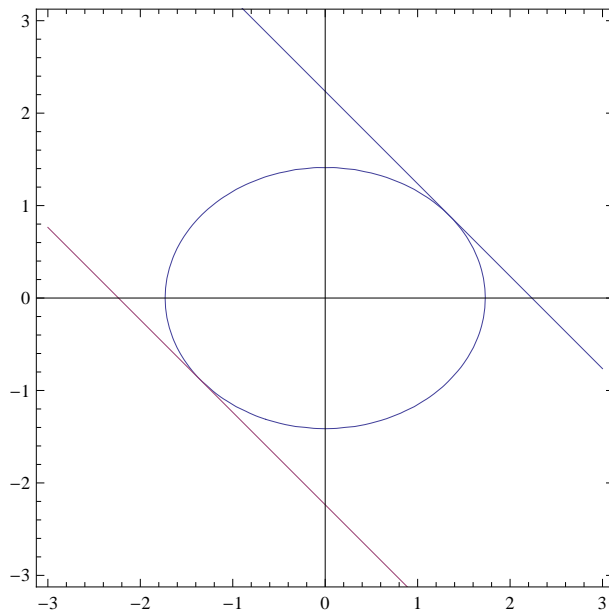


図 3:  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  と  $x + y = \pm\sqrt{5}$

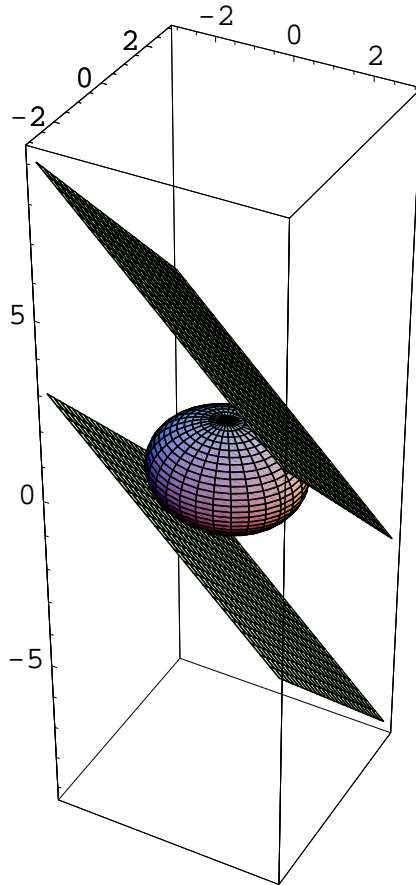


図 4:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$  と  $x + y + z = \pm 3$

105. 曲面

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

について以下の問に答えよ。

(1) 曲面上の点  $(4/3, 10/3, 5)$  における接平面の方程式を求めよ。(2) 平面  $x + y + z = k$  ( $k$  は実定数) が接するように  $k$  の値を定めよ。

**解答** (1)  $F(x, y, z) := \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9}$  とおくと、 $\text{grad } F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ (y-2)/2 \\ 2(z-3)/9 \end{pmatrix}$ ,

$\text{grad } F \left( \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, 5 \right) = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right)^T$  であるから、接平面の方程式は

$$\frac{2}{3} \left( x - \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \left( y - \frac{10}{3} \right) + \frac{4}{9} (z - 5) = 0.$$

整理して

$$3x + 3y + 2z = 24.$$

(2) 接点  $(a, b, c)$  では、 $\nabla F(a, b, c) \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  であるから、 $\exists t \in \mathbf{R}$  s.t.  $\begin{pmatrix} 2(a-1) \\ (b-2)/2 \\ 2(c-3)/9 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

これから、

$$a = \frac{t}{2} + 1, \quad b = 2t + 2, \quad c = \frac{9t}{2} + 3.$$

これと  $F(a, b, c) = 1$  から、 $t = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$ ,

$$k = a + b + c = 7t + 6 = \pm 7 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} + 6 = 6 \pm \sqrt{14}.$$

なお、接点は  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{14}} \\ 2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{7}} \right) \\ 3 + \frac{9}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{14}} \\ 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{7}} \right) \\ 3 - \frac{9}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$  ■

106. 次の2つの曲面  $\pi_1, \pi_2$  が接する ( $\pi_1, \pi_2$  の接平面が一致する) ように正定数  $\lambda$  を定めよ。

$$\pi_1 : xyz = \lambda,$$

$$\pi_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

**解答** 接点を  $(a, b, c)$  とすると、 $\pi_1$  の接平面の方程式は

$$bc(x - a) + ca(y - b) + ab(z - c) = 0, \quad \text{整理して} \quad bcx + cay + abz - 3\lambda = 0.$$

$\pi_2$  の接平面の方程式は

$$2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c(z - c) = 0, \quad \text{整理して} \quad ax + by + cz - 1 = 0.$$

この2つの平面が一致するための条件は  $\begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \\ -3\lambda \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$  が比例している、すなわち

$$\exists k \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \\ -3\lambda \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

これと  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  を連立して、 $\lambda = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ . ■

107.  $f, g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(x, y) := x^2 + y^2$ ,  $g(x, y) := 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8$  で定め、 $N_g := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; g(x, y) = 0\}$  とおく。

(1)  $N_g$  は  $\mathbf{R}^2$  の有界閉集合であることを示せ。(2)  $N_g$  上の点  $(x_0, y_0)$  における、 $N_g$  の接線の方程式を求めよ。(3)  $(x_0, y_0) \in N_g$  が曲線  $f(x, y) = c$  ( $c$  はある定数) の上にあり、かつ  $(x_0, y_0)$  における  $f(x, y) = c$  の接線が、 $N_g$  の接線と一致する (つまり  $N_g$  と  $f(x, y) = c$  が共通の接線を持つ) とき、 $(x_0, y_0)$  を求めよ。(4)  $N_g$  における  $f$  の最大値、最小値を求めよ (厳密な証明は不要)。

**解答**

- (1)  $g(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の多項式であるから、 $g: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto g(x, y) \in \mathbf{R}$  は連続である。ゆえに  $N_g = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; g(x, y) = 0\}$  は  $\mathbf{R}^2$  の閉集合である。さて、任意の  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  に対して、

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 \geq 2(x^2 + y^2)$$

が成り立つ。実際、

$$\text{左辺} - \text{右辺} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x + y)^2 \geq 0.$$

これから  $(x, y) \in N_g$  ならば、

$$8 = 5x^2 + 6xy + 5y^2 \geq 2(x^2 + y^2) \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

ゆえに  $N_g \subset \bar{B}((0, 0); 2)$ . これは  $N_g$  が有界であることを示している。

- (2)  $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 10x + 6y \\ 6x + 10y \end{pmatrix}$  であるから、 $(x_0, y_0)$  における接線の方程式は

$$(10x_0 + 6y_0)(x - x_0) + (6x_0 + 10y_0)(y - y_0) = 0.$$

これから

$$(10x_0 + 6y_0)x + (6x_0 + 10y_0)y = 10x_0^2 + 12x_0y_0 + 10y_0^2.$$

$(x_0, y_0) \in N_g$  であるから右辺は 16 である。2 で両辺を割って

$$(5x_0 + 3y_0)x + (3x_0 + 5y_0)y = 8.$$

- (3)  $f(x, y) = c$  の  $(x_0, y_0)$  における接線は、 $x_0x + y_0y = c$ . これと  $(5x_0 + 3y_0)x + (3x_0 + 5y_0)y = 8$  が一致するので、

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5x_0 + 3y_0 \\ 3x_0 + 5y_0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

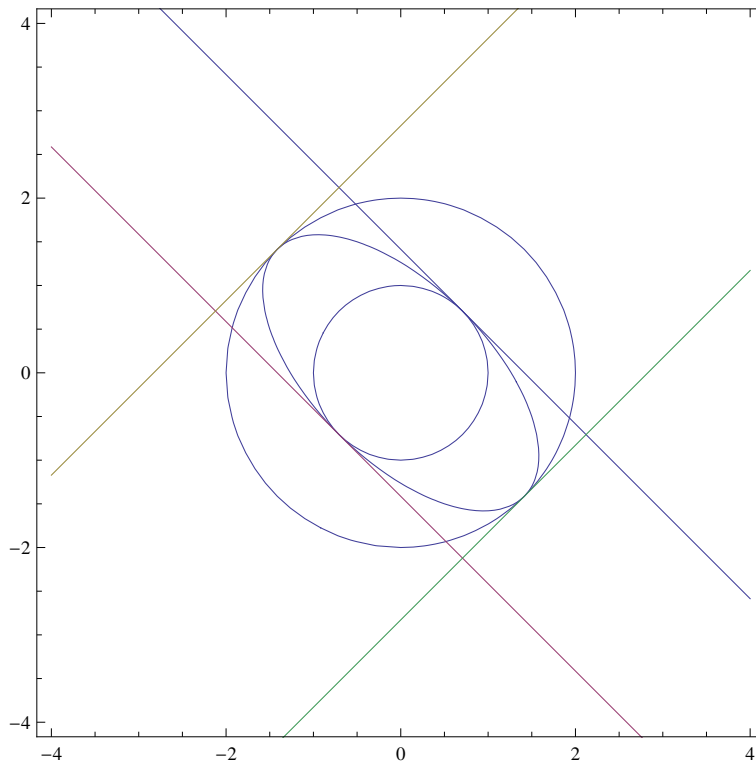
これと  $f(x_0, y_0) = c$  あるいは  $g(x_0, y_0) = 0$  を連立して解いて、

$$(x_0, y_0, c) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right), \left( \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4 \right), \left( -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4 \right).$$

ちなみに接線の方程式は

$$x_0 + y_0 = \pm\sqrt{2}, \quad x_0 - y_0 = \pm 2\sqrt{2}.$$

- (4)  $f$  が極値を取るとき、 $f$  の等高線  $f(x, y) = c$  の接線は  $N_g$  の接線であると考えられる (横断的に交わっている場合は、 $c$  を少しずらすことで、 $f$  の値を小さくしたり大きくしたり出来るので、極値とはならない)。分かりにくいかも知れないが、図を見ると納得しやすいかも。(3) で求めた  $c$  のうち、大きい方が最大値、小さい方が最小値である。 $(x, y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  のとき最大値 4,  $(x, y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  のとき最小値 1. ■



楕円  $N_g$  と同じ中心を持つ円の共通接線

```

g[x_,y_]:=5x^2+6x y+5y^2-8
Ng=ContourPlot[g[x,y]==0,{x,-4,4},{y,-4,4}]
Cs=ContourPlot[{x^2+y^2==1,x^2+y^2==4},{x,-4,4},{y,-4,4}]
Ts=ContourPlot[{x+y==Sqrt[2],x+y==-Sqrt[2],x-y==2Sqrt[2],x-y==-2Sqrt[2]},
{x,-4,4},{y,-4,4}]
Show[Ts,Ng,Cs]

```

## 微分方程式 (微分の計算練習)

(あまり意味のない計算をしてもらうのは、こちらも気が引けるので、微分方程式由来の問題を載せておく。と言ってもほとんどは単なる計算問題だけど。特に合成関数の微分法の計算が必要になる例が多い。)

108.  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(x) := \|x\|^{2-n}$  で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

109.  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  とおくとき、Laplace 方程式と呼ばれる微分方程式  $\Delta u = 0$  をみたす関数  $u = u(x, y)$  は調和関数であるという。次の関数は調和関数であることを示せ。

(1)  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$     (2)  $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$     (3)  $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

110. 関数  $u$  と  $v$  が  $C^2$  級の関数で、Cauchy-Riemann の微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

111. 関数

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbf{R}^n)$$

は次の  $n$  次元熱伝導方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

ただし

$$\Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

112.  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^2$  級ならば、定数  $c > 0$  に対して

$$u(t, x) := f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義される関数  $u$  は、次の 1 次元波動方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

113.  $C^2$  級の関数  $u: \mathbf{R}^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbf{R}$  と正定数  $c$  があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi, \eta) = u(x, t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$

解答 (右辺から左辺)

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$$

であるから、

$$x_\xi = \frac{1}{2}, \quad x_\eta = \frac{1}{2}, \quad t_\xi = -\frac{1}{2c}, \quad t_\eta = \frac{1}{2c}.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned} v_\eta &= u_x x_\eta + u_t t_\eta = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t, \\ v_{\eta\xi} &= \frac{1}{2}(u_{xx}x_\xi + u_{xt}t_\xi) + \frac{1}{2c}(u_{tx}x_\xi + u_{tt}t_\xi) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \\ &= \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}\right). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$



(左辺から右辺)

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = -c, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = c.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned} u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = -c v_\xi + c v_\eta, \\ u_{tt} &= -c(v_{\xi\xi} \xi_t + v_{\xi\eta} \eta_t) + c(v_{\eta\xi} \xi_t + v_{\eta\eta} \eta_t) = c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta} \\ &= c^2 (v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}), \\ u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + c v_\eta, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}. \blacksquare$$

114.  $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$  があるとき、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad g(r, \theta) := f(x, y),$$

すなわち、

$$g(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

これは  $\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  として、 $g := f \circ \varphi$  ということ。このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ。

**解答** chain rule と積の微分法により、

$$\begin{aligned} g_r &= f_x x_r + f_y y_r, \\ g_{rr} &= (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r) x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx} x_r + f_{yy} y_r) y_r + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx} x_r^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_r y_r + f_{yy} y_r^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr}, \\ g_{\theta\theta} &= f_{xx} x_\theta^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_\theta y_\theta + f_{yy} y_\theta^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

$x_r = \cos \theta, y_r = \sin \theta, x_{rr} = 0, y_{rr} = 0, x_\theta = -r \sin \theta, y_\theta = r \cos \theta, x_{\theta\theta} = -r \cos \theta, y_{\theta\theta} = -r \sin \theta$  であるから、

$$\begin{aligned} g_{rr} &= f_{xx} \cos^2 \theta + (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta, \\ \frac{1}{r} g_r &= \frac{f_x \cos \theta}{r} + \frac{f_y \sin \theta}{r}, \\ \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} (f_{xx} r^2 \cos^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) r^2 \sin \theta \cos \theta + f_{yy} r^2 \cos^2 \theta - f_x r \cos \theta - f_y r \sin \theta) \\ &= f_{xx} \cos^2 \theta - (f_{xy} + f_{yx}) \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta - \frac{f_x \cos \theta}{r} - \frac{f_y \sin \theta}{r}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy}.$$

(後出しの注意: この手の計算では、微分した階数だけの連続的微分可能性 (この場合だと  $f$  が  $C^2$  級であること) を仮定するのが普通なので、 $f_{xy} = f_{yx}$  が成り立ち、 $(f_{xy} + f_{yx}) = 2f_{xy}$  である。偏微分の順序交換が成立することを強調する意味で、そうまとめておいた方が良かったかも知れない。この後の計算ではそうしておく。)

応用上は、 $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  が先にある、これを  $g$  とその偏導関数で表したいので、以下のように計算する方が良いかもしれない。まず  $x, y$  についての 1 階偏導関数

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x = g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r},$$

$$f_y = g_r r_y + g_\theta \theta_y = g_r \sin \theta + g_\theta \frac{\cos \theta}{r}$$

から、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

以下は (面倒ではあるが、機械的計算で)

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( g_r \cos \theta - g_\theta \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ &= \cos \theta \left( g_{rr} \cos \theta - g_{r\theta} \frac{\sin \theta}{r} - g_\theta \frac{-\sin \theta}{r^2} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left( g_{r\theta} \cos \theta + f_r (-\sin \theta) - g_{\theta\theta} \frac{\sin \theta}{r} - g_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) \\ &= g_{rr} \cos^2 \theta - \frac{2g_{r\theta} \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta} \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{g_r \sin^2 \theta}{r} + \frac{2g_\theta \cos \theta \sin \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

同様に

$$f_{yy} = g_{rr} \sin^2 \theta + \frac{2g_{r\theta} \cos \theta \sin \theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta} \cos^2 \theta}{r^2} + \frac{g_r \cos^2 \theta}{r} - \frac{2g_\theta \cos \theta \sin \theta}{r^2}.$$

ゆえに

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}. \blacksquare$$

**注** ちなみに 3 変数バージョンは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} \right)$$

となり、工夫なしに馬鹿正直に計算すると、1 時間半以上かかる (桂田先生調査)。

**115.**  $u: \mathbf{R}^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbf{R}$  が  $C^2$  級の関数、 $c$  が正の定数で、 $\mathbf{R}^2$  上  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ( $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ) が成り立つとする。このとき  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$  を満たす関数  $f, g$  が存在することを示せ。

**116.**  $c$  を正定数、 $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^2$  級の関数とするとき、 $u$  を

$$u(x, y, z, t) = \frac{F(r - ct)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

で定義すると、 $u$  は定義される範囲で次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

117. (平面波)  $\nu \in \mathbf{R}^n$  は  $\|\nu\| = 1$  を満たし、 $c > 0$ ,  $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $C^2$  級の関数とするとき、

$$u(x, t) := U(\nu \cdot x - ct) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$$

で定義される  $u: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t)$$

を満たすことを示せ。ただし、

$$\nu \cdot x = \sum_{j=1}^n \nu_j x_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

118.  $u = u(x, y, z)$  が調和関数であるとは、 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  を満たすことをいう。

(1)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  により、 $f: \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  を定義するとき、 $f$  は調和関数であることを示せ。

(2)  $u(x, y, z)$  が調和関数ならば、

$$v(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} u\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

も調和関数であることを示せ。

(3)  $u(x, y, z)$  が  $C^3$  級の調和関数ならば、 $w(x, y, z) := xu_x(x, y, z) + yu_y(x, y, z) + zu_z(x, y, z)$  も調和関数であることを示せ。

119.  $C^2$  級の関数  $f: (0, \infty) \ni r \mapsto f(r) \in \mathbf{R}$  に対して、 $u: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  で定義する。このとき以下の問に答えよ。

(1)  $u'(x, y)$  を  $f$  を用いて表せ。(2)  $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$  を、 $f$  を用いて表せ。(3)  $u$  が  $\Delta u(x, y) = 0$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ) を満たしているとき、 $f$  を求めよ。

**解答** (1)  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおくと、 $r_x = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $r_y = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ .  $u(x, y) = f(r)$  であるから、

$$u'(x, y) = (u_x(x, y) \ u_y(x, y)) = (f'(r)r_x \ f'(r)r_y) = \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x \ y).$$

(2) (実は第 4 問を使っても解ける)

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (x(x^2 + y^2)^{-1/2}) = 1 \cdot (x^2 + y^2)^{-1/2} + x \cdot (-1/2)(x^2 + y^2)^{-3/2}(2x) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

であるから、

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (f'(r)r_x) = f''(r)r_x \cdot r_x + f'(r) \cdot r_{xx} = f''(r) \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(r) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

同様にして

$$u_{yy}(x, y) = f''(r) \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(r) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

ゆえに

$$\Delta u(x, y) = f''(r) \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + f'(r) \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = f''(r) + \frac{f'(r)}{r} = f''(\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(3)  $f''(r) + f'(r)/r = 0$  において、 $g(r) = f'(r)$  とおくと、 $g'(r)/g(r) = -1/r$ . 積分して

$$\log |g(r)| = -\log r + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$C = \log C'$  とおくと、 $C'$  は正の任意定数で、 $\log |g(r)| = \log(C'/r)$ . ゆえに  $g(r) = \pm C'/r = C''/r$  ( $C''$  は任意定数). これから  $f(r) = A \log r + B$  ( $A, B$  は任意定数). ■

**120.**  $C^2$  級関数  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき、 $u: \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $u(x, y, z) := f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  で定める。このとき、以下の間に答えよ。

(1)  $\nabla u$  を  $f$  を用いて表せ。(2)  $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$  を  $f$  を用いて表せ。(3)  $u$  が  $\Delta u(x, y, z) = 0$  ( $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ) を満たしているならば、実は  $u$  は次の形をしていることを示せ。

$$u(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + D \quad (C, D \text{ は定数}).$$