多変数の微分積分学1 演習問題 (Part 1)

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2013年5月27日

位相がらみの話は「集合・位相・距離」に任せる (その部分を Part 1 と呼ぶことにするが配布しない)。Taylor の定理〜最後までを Part 3 と呼ぶ (これは準備でき次第配布する)。

高校数学から

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ とおくとき、$y = f(x)$ のグラフの概形を描きなさい。(増減表を作成すること。また第2次導関数 (2階の導関数) を求め、曲線の凹凸も調べること。$\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ も求めること。)

注意事項　この問題は高校数学の範疇に属すると思いますが、多変数関数に取り組む前に、1変数関数でどうなるか確認しておきたいので、あえて解いてもらいました。いわゆる増減の様子以外にも、外して欲しくない常識があります。

(i) 極値を取る変数の値や、座標軸との交点など重要な値はグラフと一緒に書き込む。
→折角計算して調べて増減表に書き込みもしたのに、グラフに反映されていなくて (何のために調べたのだろう？)、変なことになっている人がタマにいます。

(ii) 連続関数のグラフは「切れない」 (正確に言うと連結集合)
→笑い話みたいですが、この問題の場合にも、グラフを切ってしまう人がいたりします。分数関数 (正確には有理関数) は、分母が 0 になるところで、不連続になりうるので、グラフが切れることもありますが、この問題の関数ではそうなりません (当たり前すぎるかもしれないけれど、連続かそうでないか、間違えないように)。

(iii) C^1 級関数のグラフは「滑らか」 (接線の傾きが連続的に変化するので、とがらない)
→こうしてしまう人は結構多い。そうなってしまうのは何か間違えているせいなので、要再チェック、です。(たとえ話をすると、面積を計算して負の値が出たり、確率が 1 より大きくなったりする類いの非常識な結果です。)

(iv) グラフを描く範囲が指定されていない場合は自分で判断する。例えば $\mathbf{R}$ 全体で定義されている場合、$x \to \pm\infty$ でどうなるか調べる。勝手に $x \geq 0$ の範囲に限定したりしない。周期関数の場合は、そのことを指摘して、最低1周期分は描く。

(v) 入試の採点をしていて、最近増減表が書けない (途中まで書いてギブアップすることもある)、書いてもそれをグラフに生かせない受験生が多くなったと感じています (凝ったことをしようとして失敗しているケースがあるみたい)。添削して返してあげたいくらいで…

それから、増減表を書かない人も多くなっています。増減表を書かずに、言葉で説明するのは結構大変 (難しい) です。結局は、増減表を書いて、それを使って考えてグラフも描けるようにするのが、一番楽だと思います。高校の先生になる人も多いと思いますが、生徒にしっかり練習させてあげてください。

略解 商の微分法 $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{GF' - G'F}{G^2}$ は既知とする (公式は自力で導出できるように)。

まず高校の数学 II までの知識でどこまで出来るかやってみよう。

$$f'(x) = \frac{(2x^2+1)\cdot 1 - 4x\cdot x}{(2x^2+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{-2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{(2x^2+1)^2}$$

であるから、増減表は

x		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$

であり、極小値と極大値はそれぞれ $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$x\to\infty$, $x\to-\infty$ の時の極限が気になるので調べると、

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2+1/x^2} = \frac{0}{2+0} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1/x}{2+1/x^2} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

数学 3 の知識を用いると、2 階導関数 (2 次の導関数) を調べて、グラフの凹凸が分かる。

$$f''(x) = \frac{(2x^2+1)^2\cdot(-4x) - 2(2x^2+1)4x\cdot(1-2x^2)}{(2x^2+1)^4} = \frac{-4x(2x^2+1) - 8x(1-2x^2)}{(2x^2+1)^3}$$

$$= \frac{4x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3} = \frac{8x\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{(2x^2+1)^3}$$

であり、増減表は

x	$-\infty$		$-\sqrt{3/2}$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$\sqrt{3/2}$		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$		$\searrow$	0
			変曲点		極小		変曲点		極大		変曲点		

となる[1]。f'' の符号から、$x < -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ では上に凸、$-\sqrt{\dfrac{3}{2}} < x < 0$ では下に凸、$0 < x < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ では上に凸、$\sqrt{\dfrac{3}{2}} < x$ では下に凸。

[1] $\searrow$, $\searrow$, $\nearrow$, $\nearrow$ は便利だが、間違える人も多い。慣れていなければ無理して使わないのが無難かもしれない。

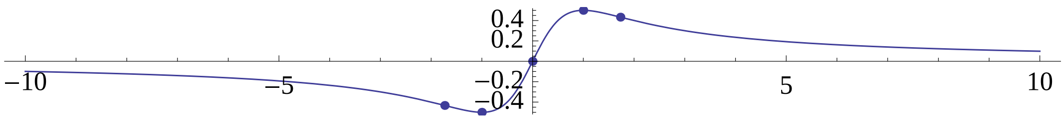


図 1: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフ

論理

2. 次の論理式の否定を作れ。

(1) $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N)\ \|x_n - a\| \leq \varepsilon.$

(2) $(\forall x \in A)\ (\exists\varepsilon > 0)$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A.$

(3) $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in B(a;\delta))\ \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$

(4) $(\exists R \in \mathbf{R})\ (\forall x \in A)\ \|x\| \leq R.$

解答.

(1) $(\exists\varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbf{N})\ (\exists n \in \mathbf{N},\ n \geq N)\ \|x_n - a\| > \varepsilon.$

(2) $(\exists x \in A)\ (\forall\varepsilon > 0)$ s.t. $B(x;\varepsilon) \not\subset A.$

(3) $(\exists\varepsilon > 0)\ (\forall\delta > 0)\ (\exists x \in B(a;\delta))\ \|f(x) - f(a)\| > \varepsilon.$

(4) $(\forall R \in \mathbf{R})\ (\exists x \in A)\ \|x\| > R.$

3. 連立方程式

$$\begin{cases} x(x^2+4y+y^2) = 0 \\ (y+2)(y+x^2) = 0 \end{cases}$$

を解け。

解答 問題は、条件

$$x(x^2+4y+y^2) = 0 \quad \wedge \quad (y+2)(y+x^2) = 0 \tag{★}$$

を満たす (x, y) をすべて求めよ、ということである。一般に「$ab = 0 \iff [a = 0 \quad \vee \quad b = 0]$」であるから、

$$x(x^2+4y+y^2) = 0 \iff \left[x = 0 \quad \vee \quad x^2+4y+y^2 = 0\right],$$

$$(y+2)(y+x^2) = 0 \iff \left[y+2 = 0 \quad \vee \quad y+x^2 = 0\right].$$

ゆえに

$$(★) \iff \left[x = 0 \quad \vee \quad x^2+4y+y^2 = 0\right] \wedge \left[y+2 = 0 \quad \vee \quad y+x^2 = 0\right].$$

論理の分配法則[2]を用いると、

$$
\begin{aligned}
(\bigstar) \quad \iff \quad & \left[x=0 \quad \wedge \quad y+2=0\right] \vee \left[x=0 \quad \wedge \quad y+x^2=0\right] \\
& \vee \left[x^2+4y+y^2=0 \quad \wedge \quad y+2=0\right] \vee \left[x^2+4y+y^2=0 \quad \wedge \quad y+x^2=0\right].
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\left[x^2+4y+y^2=0 \quad \wedge \quad y+x^2=0\right] \quad & \iff \quad \left[x^2-4x^2+x^4=0 \quad \wedge \quad y=-x^2\right] \\
& \iff \quad \left[\left(x=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right) \quad \wedge \quad y=-x^2\right] \\
& \iff \quad \left[(x,y)=(0,0),(\sqrt{3},-3),(-\sqrt{3},-3)\right]
\end{aligned}
$$

であるから[3]、

$$
\begin{aligned}
(\bigstar) \quad \iff \quad & [(x,y)=(0,-2)] \vee [(x,y)=(0,0)] \\
& \vee [(x,y)=(\pm 2,-2)] \vee \left[(x,y)=(0,0),(\sqrt{3},-3),(-\sqrt{3},-3)\right] \\
\iff \quad & (x,y)=(0,0),(0,-2),(\pm 2,-2),(\pm\sqrt{3},-3). \blacksquare
\end{aligned}
$$

4. 連立方程式

$$
\begin{cases}
(3x^2-1)(y^3-y)=0 \\
(3y^2-1)(x^3-x)
\end{cases}
$$

を解け。

解答.

$$
\begin{aligned}
& \left(3x^2-1=0 \quad \text{or} \quad y^3-y=0\right) \quad \text{and} \quad \left(3y^2-1=0 \quad \text{or} \quad x^3-x=0\right) \\
\iff & (3x^2-1=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (3x^2-1=0 \text{ and } x^3-x=0) \\
& \text{or } (y^3-y=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (y^3-y=0 \text{ and } x^3-x=0) \\
\iff & (x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{or} \quad \text{解なし} \quad \text{or} \quad \text{解なし} \\
& \text{or} \quad (x,y)=(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1) \\
\iff & (x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\pm(1,0),\pm(1,1),\pm(1,-1),\pm(0,1),(0,0). \blacksquare
\end{aligned}
$$

$\mathbf{R}^n$ の内積とノルム

5. (Schwarz の不等式の別証明) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ は $\mathbf{R}^n$ の要素で、$\vec{y} \neq \vec{0}$ とする。

(1) 原点と $\vec{y}$ を通る直線 $L := \{t\vec{y}; t \in \mathbf{R}\}$ 上の点 $\vec{w}$ で、$(\vec{x}-\vec{w}) \perp \vec{y}$ を満たすものを求めよ ($\vec{w}$ は、$\vec{x}$ の L への正射影、あるいは、$\vec{x}$ から L に下ろした垂線の足、と呼ばれる)。

[2] $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \equiv (P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$.

[3] 念のため: $x=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$ というのは、$x=0 \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$ ということである。

(2) $\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ が成り立つことを確めよ (直角三角形なので、要するにピタゴラスの定理であるが、ちゃんと計算で確めよ)。

(3) $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ が成り立つことを示せ。等号はいつ成立するか。

解答

(1) $\vec{w} = t\vec{y}$ を $(\vec{x} - \vec{w}, \vec{y}) = 0$ に代入して、t を求めて、$\vec{w} = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})}\vec{y}.$

(2) $(\vec{x} - \vec{w}, \vec{w}) = 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x} - \vec{w} + \vec{w}, \vec{x} - \vec{w} + \vec{w}) = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 + (\vec{x} - \vec{w}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{x} - \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2 \\ \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 + 0 + 0 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.\end{aligned}$$

(3) (2) で $\|\vec{x} - \vec{w}\|^2 \geq 0$ に注意すると、$\|\vec{w}\| \leq \|\vec{x}\|$. ゆえに

$$\left|\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})}\right| \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|.$$

これから $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$. すなわち $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$. 等号は $\|\vec{x} - \vec{w}\| = 0$, すなわち $\vec{w} = \vec{x}$ のとき、そのときのみ成り立つ。これは $\vec{x}$ と $\vec{y}$ が同じ方向のとき。■

6. (中線定理[4]) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ を示せ。

略解　左辺を内積で表して展開すると右辺が得られる。

7. 平面上の三角形 ABC に対し、$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を最小にする点 P は、三角形 ABC の重心であることを示せ — $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2$ は $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3$ で最小となる。

解答

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{c}\|^2 \\ &= 3\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2 \\ &= 3\|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3\|^2 - \frac{1}{3}\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\|^2 + \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2\end{aligned}$$

であるから、$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3$ のときに最小となる。最小値は

$$\begin{aligned}f((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3) &= \frac{1}{3}\left(3\|\boldsymbol{a}\|^2 + 3\|\boldsymbol{b}\|^2 + 3\|\boldsymbol{c}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{c}\|^2 - 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - 2(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\|a - b\|^2 + \|b - c\|^2 + \|c - a\|^2\right). ■\end{aligned}$$

[4]「三角形 OAB において、辺 AB の中点を M とすると、$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{AM}^2)$.」というのがパップスの中線定理である。英語では "parallelogram theorem" で、直訳すると「平行四辺形定理」。

8. 任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して、$\|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \Big| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \Big|$ を示せ。

解答 (講義ノートを見よ。)

9. (1) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

とおくとき、$\|\cdot\|_1$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。
(2) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

とおくとき、$\|\cdot\|_\infty$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。

ヒント 地道にチェックするだけ。使うのは三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ と、$\max_i (a_i+b_i) \leq \max_i a_i + \max_i b_i$ ということくらい。■

10. (やや難) $1 < p < \infty$ とするとき、$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

とおくとき、$\|\cdot\|_p$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。

11. xy 平面で次の不等式で表される範囲を図示せよ。
(1) $|x|+|y| \leq 1$ (2) $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$ (3) $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$ (4) $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} \leq 1$

1変数ベクトル値関数

12. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} \\ x^3 - 3x + 2 \end{pmatrix}$

解答 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

13. I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^n$, $\vec{g}\colon I \to \mathbf{R}^n$ とする。
(1) $\vec{f}$ と $\vec{g}$ がともに微分可能であるならば

$$\frac{d}{dt}\Big(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\Big) = \Big(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\Big) + \Big(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\Big) \quad (t \in I)$$

が成り立つことを示せ。
(2) 質点が等速運動するならば (つまり時刻 t における位置を $\vec{f}(t)$ と表すとき、$\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|$ が定数関数となる)、速度と加速度はつねに直交することを示せ。

解答

(1) $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} := \vec{f}$, $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} := \vec{g}$ とするとき、

$$\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(t)$$

であるから、(1 変数実数値関数の) 積の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} f_j(t)g_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(f_j(t)g_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(f_j'(t)g_j(t) + f_j(t)g_j'(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j'(t)g_j(t) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t)g_j'(t) = \left(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\right).\end{aligned}$$

(2) 仮定から、$\exists C \in \mathbf{R}$ s.t. $\forall \in I$ $\left\|\vec{f}'(t)\right\| = C$. ゆえに

$$\left(\vec{f}'(t), \vec{f}'(t)\right) = \left\|\vec{f}'(t)\right\|^2 = C^2.$$

両辺を t で微分すると、(1) を用いて

$$\left(\vec{f}\,''(t), \vec{f}\,'(t)\right) + \left(\vec{f}\,'(t), \vec{f}\,''(t)\right) = 0.$$

左辺は $2\left(\vec{f}\,''(t), \vec{f}\,'(t)\right)$ であるから、

$$\left(\vec{f}\,''(t), \vec{f}\,'(t)\right) = 0.$$

これは $\vec{f}\,''(t)$ と $\vec{f}\,'(t)$ が直交することを示す。■

(1) の別解　積の微分法の証明を思い出して、それをベクトル値関数化する (この方法は無限次元でも通用する)。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] \\ &\quad= \frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] \\ &\quad= \frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\right)\right].\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] - \left[\left(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\right)\right] \\ &\quad= \left(\frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\right) \\ &\quad\quad+ \left(\vec{f}(t), \frac{\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)}{h} - \vec{g}'(t)\right).\end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h),\vec{g}(t+h)\right)-\left(\vec{f}(t),\vec{g}(t)\right)\right]-\left[\left(\vec{f}'(t),\vec{g}(t)\right)+\left(\vec{f}(t),\vec{g}'(t)\right)\right]\right|$$
$$\le\left\|\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h}-\vec{f}'(t)\right\|\|\vec{g}(t+h)\|+\left\|\vec{f}'(t)\right\|\|\vec{g}(t+h)-\vec{g}(t)\|$$
$$+\left\|\vec{f}(t)\right\|\left\|\frac{\vec{g}(t+h)-\vec{g}(t)}{h}-\vec{g}'(t)\right\|$$
$$\to 0\cdot\|\vec{g}(t)\|+\left\|\vec{f}'(t)\right\|\cdot 0+\left\|\vec{f}(t)\right\|\cdot 0=0.$$

ただし

- $h\to 0$ のとき $\vec{F}(t+h)\to\vec{A}$ ならば $\left\|\vec{F}(t+h)\right\|\to\left\|\vec{A}\right\|$
- $\vec{g}$ が t で微分可能ならば $\vec{g}(t+h)\to\vec{g}(t)$ $(h\to 0)$

ということを使った (その証明も 1 変数の場合と同様に出来る)。 ■

集合の包含関係、等式の証明

14. 以下の (1)〜(4) を示せ。

(1) $A:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>0$ かつ $y>0\}$, $(a,b)\in A$ とするとき、$\varepsilon:=\min\{a,b\}$ とおくと、$B((a,b);\varepsilon)\subset A$ が成り立つ。

(2) $x\in(a,b)$ に対して、$\varepsilon:=\min\{a-x,b-x\}$ とおくとき、$\varepsilon>0$ かつ $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset(a,b)$ である。

(3) $x\in B(a;r)$ に対して、$\varepsilon:=r-\|a-x\|$ とおくとき、$\varepsilon>0$ かつ $B(x;\varepsilon)\subset B(a;r)$ である。

(4) $A:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;(x-a)^2+(y-b)^2>r^2\}$, $(p,q)\in A$ とするとき、$\varepsilon:=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}-r$ とおくと、$B((p,q);\varepsilon)\subset A$ が成り立つ。

15. $B(a;r)$ を $\mathbf{R}^m$ の球とする時、以下の等式を証明せよ。

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}B(0;1/n)=\{0\}$ (2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}B(0;n)=\mathbf{R}^m$

ヒント 集合の等式 $A=B$ を証明するには、$A\subset B$ と $B\subset A$ を証明すれば良い。$A\subset B$ とは、$\forall a\in A$ に対して $b\in B$ が成り立つこと。 ■

R の有界集合

「コンパクト集合」という重要な (便利な) 概念があるが、$\mathbf{R}^n$ の部分集合 A がコンパクト集合であるためには、A が有界閉集合であることが必要十分である。与えられた集合が有界であるかどうかを判定することは重要である。

また関数が有界という概念があるが、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が有界であるとは、f の値域 $f(\Omega)=\{f(x);x\in\Omega\}$ が $\mathbf{R}$ の有界集合であることを意味する。

16. 以下の $\mathbf{R}$ の部分集合は、(a) 上に有界だが下に有界ではない, (b) 下に有界だが上に有界ではない, (c) 有界である, (d) 上にも下にも有界でない, のいずれに該当するか、判定せよ。
(1) $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (2) $\{n^2; n \in \mathbf{N}\}$ (3) $\{(-1)^n n; n \in \mathbf{N}\}$ (4) $\{-n[1+(-1)^n]; n \in \mathbf{N}\}$.

解答

(1) $(\forall n \in \mathbf{N})\ 0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ が成り立つので、下に有界かつ上に有界である。ゆえに (c).

(2) $(\forall n \in \mathbf{N})\ 1 \leq n^2$ が成り立つので、下に有界である。$(\forall U \in \mathbf{R})\ (\exists n \in \mathbf{N})\ U < n^2$ が成り立つので、上に有界ではない。ゆえに (b).

(3) 最初の数項を書いてみると、

$$(-1)^n n = -1, 2, -3, 4, -5, \cdots$$

偶数項目 ($n = 2k$ を取り出すと $(-1)^n n = (-1)^{2k} 2k = 2k = 2, 4, 6, \cdots$ で、これは明らかに上に有界でない。奇数項目 ($n = 2k-1$) を取り出すと $(-1)^n n = (-1)^{2k-1}(2k-1) = -(2k-1) = -1, -3, -5, \cdots$ で、これは明らかに下に有界でない。まとめると、上にも下のみ有界でない。ゆえに (d).

(4) $n = 1, 2, \ldots$ とするとき、

$$-n\left[1+(-1)^n\right] = 0, -4, 0, -8, 0, -12, 0, \cdots, 0, -4m, 0, -4(m+1), \cdots$$

である。$(\forall n \in \mathbf{N})\ 0 - n\left[1+(-1)^n\right] \leq 0$ が成り立つから、上に有界である。一方、$(\forall L \in \mathbf{R})$ $(\exists n \in \mathbf{N})\ -n\left[1+(-1)^n\right] < L$ が成り立つから、下に有界ではない。ゆえに (a). ■

17. 次にあげる $\mathbf{R}$ の部分集合の上限、下限を求めよ。
(1) $(0, 1]$ (2) $\mathbf{N}$ (3) $\mathbf{R}$ (4) $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (5) $\{n^2; n \in \mathbf{N}\}$ (6) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$
(7) $\{x \in \mathbf{Q}; x^2 < 2\}$ (8) $\left\{\sin \dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (9) $(0, 1) \cup (2, 3)$ (10) $\{\tan^{-1} x; x \in \mathbf{R}\}$ (ただし $\tan^{-1}$ は主値を取るものとする。)

解答

(1) $(0, 1]$ の上限は 1 ($\because$ 最大値), 下限は 0.

(2) $\mathbf{N}$ の上限は存在しない (上の余談的注意参照), 下限は 1 ($\because$ 最小値).

(3) $\mathbf{R}$ の上限も下限も存在しない。

(4) $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ の上限は 1 ($\because$ 最大値), 下限は 0 (例題を参考にすると証明できるだろう).

(5) $\{n^2; n \in \mathbf{N}\}$ の上限は存在しない、下限は 1 ($\because$ 最小値).

(6) $n=1,2,3,4,\cdots$ とするとき

$$(-1)^n\frac{1}{n}=-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots$$

であるから、$\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}$ の上限は $\dfrac{1}{2}$ ($\because$ 最大値), 下限は -1 ($\because$ 最小値).

(7) $\{x\in\mathbf{Q}; x^2<2\}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbf{Q}$ である。上限は $\sqrt{2}$, 下限は $-\sqrt{2}$.

(8) $0\le\dfrac{1}{n}\le 1$ であり、$[0,1]\subset[0,\pi/2]$ で $\sin$ は単調増加関数であることに注意する。$\left\{\sin\dfrac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\right\}$ の上限は $\sin 1$ ($\because$ 最大値), 下限は 0.

(9) $(0,1)\cup(2,3)$ の上限は 3, 下限は 0.

(10) $\{\tan^{-1}x; x\in\mathbf{R}\}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ である。上限は $\frac{\pi}{2}$, 下限は $-\frac{\pi}{2}$. ■

18. 次の関数のうち有界なものはどれか。
(1) $f(x)=x$ $(x\in\mathbf{R})$ (2) $f(x)=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ (3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$

$\mathbf{R}^n$ の有界集合

19. (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で有界であるものの例をあげ、定義に従って、有界であることを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で有界でないものの例をあげ、定義に従って、有界でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

20. $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; 5x^2+6xy+5y^2=8\}$ は有界集合であることを示せ。

解答 $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$2x^2+2y^2\le 5x^2+6xy+5y^2$$

が成り立つ。実際

$$(\text{右辺})-(\text{左辺})=5x^2+6xy+5y^2-(2x^2+2y^2)=3(x+y)^2\ge 0.$$

ゆえに $(x,y)\in A$ に対して、

$$2(x^2+y^2)\le 5x^2+6xy+5y^2=8$$

が成り立つ。これから $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{8/2}=2$. すなわち $A\subset\overline{B}((0,0);2)$. ■

21. $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ とする。

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1\right\}$$

とおくとき、A が $\mathbf{R}^2$ の有界集合であるか、そうでないか、判定せよ。

22. 次の各集合を図示し、有界であればそうであることを証明せよ。さらに閉集合であることを証明せよ。
(1) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 \le 4\}$ (2) $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y = \sin x\}$

解答 (1) 図の双曲線のうち、原点中心半径 2 の閉円盤に含まれている部分。$(x,y) \in A$ とするとき、$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4} = 2$ だから、$R = 2$ として $A \subset \overline{B}((0,0);R)$ が成立する。ゆえに A は有界である。(2) B はご存じ sin のグラフである。これは有界ではない。実際 $\forall R \in \mathbf{R}$ に対して、$x := |R| + 1$, $a := (x, \sin x)$ とおくと $a \in B$ で、$\|a\| \ge |x| = |R| + 1 > R$. ■

注意 関数 sin は有界な関数であるが (sin の値域 $[-1,1]$ は $\mathbf{R}$ の有界部分集合である)、グラフは有界ではない (グラフ B は $\mathbf{R}^2$ の有界でない部分集合である)。■

23. $1 \le p \le \infty$, $\boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \begin{cases} \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|x|,|y|\} & (p = \infty) \end{cases}$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $\forall p \in [1,\infty)$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_p \le 2^{1/p}\|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $1 \le p \le \infty$ を満たす任意の p に対して、$A_p := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2; |\boldsymbol{x}|_p \le 1\right\}$ とおくとき、 A_p は $\mathbf{R}^2$ の有界集合であることを示せ。

解答 (1)

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p = (\max\{|x|,|y|\})^p = \max\{|x|^p,|y|^p\} \le |x|^p + |y|^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^p$$

であるから、

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_p.$$

一方

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^p = |x|^p + |y|^p \le \max\{|x|,|y|\}^p + \max\{|x|,|y|\}^p = 2\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty^p$$

であるから、

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \le 2^{1/p}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

(2) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_p$ であるから、$\|\boldsymbol{x}\|_p \le 1$ ならば $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le 1$. ゆえに $A_p \subset A_\infty$. 一方、$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $\|\boldsymbol{x}\|_2 \le \sqrt{2}\,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ であるから、$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \le 1$ ならば $\|\boldsymbol{x}\|_p \le \sqrt{2}$. ゆえに $A_\infty \subset \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 \le \sqrt{2}\right\} = \overline{B}((0,0);\sqrt{2})$. ゆえに $A_p \subset \overline{B}((0,0);\sqrt{2})$. ゆえに A_p は $\mathbf{R}^2$ の有界集合である。■

R^n の位相

開集合、閉集合の定義は自信を持って即答できるようにしておくこと。A が開集合であることを開集合の定義に基づき証明するには、$\forall x \in A$ に対して、$B(x;\varepsilon) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ の存在を示すことになる。一般に、x と A の補集合との距離を ε とすると、$B(x;\varepsilon) \subset A$ が証明できるので、後は $\varepsilon > 0$ かそうでないかが問題となる。開集合でないことを示すには、$\varepsilon = 0$ となるような $x \in A$ が存在することを確める。

なお、連続関数を既習であれば「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を連続関数, $a,b,c \in \mathbf{R}$ とするとき、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \ne c\}$ はすべて $\mathbf{R}^n$ の開集合」という定理は有用である。

24. $A \subset \mathbf{R}^n$, $A \ne \mathbf{R}^n$, $x \in A$ とするとき、$\varepsilon := \inf\{|x-y|; y \in A^c\}$ とおくと、$B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことを示せ。

解答 $\forall z \in B(x;\varepsilon)$ に対して、$\|x-z\| < \varepsilon = \inf\{\|x-y\|\,; y \in A^c\}$ であるから、$z \notin A^c$. すなわち $z \in A$. ゆえに $B(x;\varepsilon) \subset A$. ■

25. (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合でも、全空間でもないとする) で、開集合であるものの例をあげ、定義に従って、開集合でないことを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で開集合でないものの例をあげ、定義に従って、開集合でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

26. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合でも、全空間でもないとする) で、閉集合であるものの例をあげ、定義に従って、閉集合でないことを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で閉集合でないものの例をあげ、定義に従って、閉集合でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

27. 次の各集合について、$\mathbf{R}$ の開集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。
(1) 空集合 $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}$ (3) $\{0\}$ (4) $(0,1)$ (5) $[0,1]$ (6) $(0,1]$ (7) $[0,1)$ (8) $(0,\infty)$ (9) $[0,\infty)$ (10) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

記号の説明: $(a,b) = \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$, $[a,b] = \{x \in \mathbf{R}; a \le x \le b\}$, $(a,b] = \{x \in \mathbf{R}; a < x \le b\}$, $[a,b) = \{x \in \mathbf{R}; a \le x < b\}$. $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$. 特に $\mathbf{R}\setminus\{0\} = \{x \in \mathbf{R}; x \ne 0\}$.

解答

(1) Yes, 証明済み。

(2) Yes, 証明済み。

(3) No, $0 \in \{0\}$ であるが、明らかに $\forall \varepsilon > 0\ B(0;\varepsilon) \not\subset \{0\}$.

(4) Yes, 一般に「開区間は開集合」。定理に戻って証明するには、$x \in (0,1)$ に対して、$\varepsilon := \min\{x, 1-x\}$ とおくと、$B(x;\varepsilon) \subset (0,1)$.

(5) No, $0 \in [0,1]$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$B(0;\varepsilon)$ は負の数 $-\varepsilon/2$ を含むので $B(0;\varepsilon) \not\subset [0,1]$.

(6) No, 証明は (5) のそれとほぼ同じ。

(7) No, $1 \in (0,1]$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$B(1;\varepsilon)$ は 1 より大きい数 $1+\varepsilon/2$ を含むので $B(1;\varepsilon) \not\subset (0,1]$.

(8) Yes, 一般に「開区間は開集合」。定理に戻って証明するには、$x \in (0,\infty)$ に対して、$\varepsilon := x$ とおくと、$B(x;\varepsilon) \subset (0,\infty)$.

(9) No, $0 \in [0,\infty)$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$B(0;\varepsilon)$ は負の数 $-\dfrac{\varepsilon}{2}$ を含むので、$B(0;\varepsilon) \not\subset [0,\infty)$.

(10) Yes, $\mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ で、これは開集合 (「開区間は開集合」) の合併であるから開集合である。

28. 前問の各集合について、$\mathbf{R}$ の閉集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。

解答

(1) Yes, 「空集合は閉集合」を証明済み

(2) Yes, 「全空間は閉集合」を証明済み

(3) Yes, 補集合 $\{0\}^c = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ は開区間 (開集合である！) の合併なので開集合だから、$\{0\}$ は閉集合

(4) No, 補集合 $(0,1)^c = \mathbf{R} \setminus (0,1) = (-\infty,0] \cup [1,\infty)$ は開集合ではない (この集合に含まれる点 0 を中心とする任意の開球 $B(0;\varepsilon) = (-\varepsilon,\varepsilon)$ は、$\min\{1/2, \varepsilon/2\}$ という、$(-\infty,0] \cup [1,\infty)$ に含まれない点を含むので、$(0,1)^c$ は開集合ではない) ので、$(0,1)$ は閉集合ではない。

(5) Yes, $[0,1]^c = \mathbf{R} \setminus [0,1] = (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ は、開区間 (これは開集合) の合併であるから開集合なので、$[0,1]$ は閉集合である。

(6) No, 補集合 $[0,1)^c = \mathbf{R} \setminus (0,1) = (-\infty,0) \cup [1,\infty)$ は開集合ではない (この集合に含まれる点 1 を中心とする任意の開球 $B(1;\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ は、$\max\{1-\varepsilon/2, 1/2\}$ という、$(-\infty,0) \cup [1,\infty)$ に含まれない点を含むので、$[0,1)^c$ は開集合ではない) ので、$[0,1)$ は閉集合ではない。

(7) No, (5) とほぼ同じ証明。

(8) No, $(0,\infty)^c = (-\infty, 0]$ は開集合ではない (この集合に含まれる 0 を中心とする任意の開球 $B(0;\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ は、$(-\infty, 0]$ に含まれない点 $\varepsilon/2$ を含む) ので、$(0,\infty)$ は閉集合ではない。

(9) Yes, 補集合 $[0,\infty)^c = (-\infty, 0)$ は開区間なので開集合であるから、$[0,\infty)$ は閉集合である。

(10) No, 補集合 $\mathbf{R}\backslash(\mathbf{R}\backslash\{0\}) = \{0\}$ は開集合でないので (実際、この集合に含まれる 0 を中心とする任意の開球 $B(0;\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ は $\{0\}$ に含まれない点 $\varepsilon/2$ を含むので、$B(0;\varepsilon) \not\subset \{0\}$)、$\mathbf{R} \setminus \{0\}$ は閉集合ではない。

29. $\mathbf{R}^2$ における次の各集合について、(図示できる場合はそうして) 開集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。
(1) $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}^2$ (3) $\{(0,0)\}$ (4) $\{(0,0),(1,1)\}$ (5) $(1,2) \times (3,4)$
(6) $[1,2] \times (3,4)$ (7) $[1,2] \times [3,4]$ (8) $\{(x,y); 5 < x^2 + y^2 < 6\}$ (9) $(0,\infty) \times (0,\infty)$
(10) $\{(x,y); x^3 \le y \le x^2\}$ (11) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (12) $\{(1/n, 1/n); n \in \mathbf{N}\}$

解答

(1) 空集合は (描けないなあ…) 授業で証明したように開集合である。

(2) 全空間は (これも完全には描けないなあ…) 授業で証明したように開集合である。

(3) 開集合ではない。$(0,0) \in \{(0,0)\}$ であるが、どんなに小さな正数 ε を取っても、$B((0,0);\varepsilon)$ は $\{(0,0)\}$ をはみ出してしまう (含まれない — きちんとやるには、例えば 点 $(\varepsilon/2, 0)$ を考える。)。

(4) 開集合ではない。証明は (3) と同様である。

(5) これは $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 < x < 1$ かつ $2 < y < 3\}$ と書き直すことができ、長方形から周を除いた集合である。開集合である。定義に戻っても証明は簡単だが、$\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x \in \mathbf{R}$ という連続関数を考えると、$\{(x,y); 0 < x < 1\}$ は開集合であることがすぐ分かる。同様に $\{(x,y); 2 < y < 3\}$ は開集合であり、与えられた集合は、この両者の共通部分であるから開集合である。

(6) これは $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1$ かつ $2 < y < 3\}$ と書き直すことができ、長方形から上の辺、下の辺を除いたものである。開集合ではない。例えば、左の辺上の点 $(0, 5/2)$ を中心とした円盤を考えてみると良い。

(7) これは $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1$ かつ $2 \le y \le 3\}$ と書き直すことができ、長方形 (周をすべて含む) である。開集合ではない。これは上の (6) の理由と同じでよい。

(8) これは原点中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円と $\sqrt{6}$ の円で挟まれた部分 (円周は含まない) を表す (いわゆる円環領域)。開集合である。これは $f(x,y) = x^2 + y^2$ を考えれば、$\{(x,y); 5 < f(x,y) < 6\}$ と書けることから明らかである。

(9) これは $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>0$ かつ $y>0\}$ であり、いわゆる第1象限である。開集合である。これも…もう簡単なはずなので略。

(10) 開集合ではない。$(0,0)\in\{(x,y); x^3\le y\le x^2\}$ であるが、どんなに小さな正数 ε を取っても、$B((0,0);\varepsilon)$ ははみ出してしまう (例えば、第3象限の点は明らかに $\{(x,y); x^3\le y\le x^2\}$ に含まれない)。

(11) これは開集合。定義に戻って考えても簡単であるし、$f(x,y)=x^2+y^2$ を用いると $\{(x,y); f(x,y)>0\}$ と書けることからも分かる。

30. 前問の各集合について、閉集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。

解答 閉集合であるかないか、答のみ記す。(1) Yes, (2) Yes, (3) Yes, (4) Yes, (5) No, (6) No, (7) Yes, (8) No, (9) No, (10) Yes, (11) No, (12) No

ただ 1 点からなる集合 $\{(a,b)\}$ が閉集合であることは覚えておくとよい。それを押えておくと、「二つの閉集合の合併はつねに閉集合である」ことから、(4) は閉集合であることが言える。

31. 次の各集合について、内部、境界、外部、閉包を求めよ。
(1) 空集合 $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}$ (3) $\{0\}$ (4) $(0,1)$ (5) $[0,1]$ (6) $(0,1]$ (7) $[0,1)$ (8) $(0,\infty)$ (9) $[0,\infty)$ (10) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

結果のみ (根拠は省略)

(1) $A^i=\emptyset$, $A^b=\emptyset$, $A^e=\mathbf{R}$, $\overline{A}=\emptyset$

(2) $A^i=\mathbf{R}$, $A^b=\emptyset$, $A^e=\emptyset$, $\overline{A}=\mathbf{R}$

(3) $A^i=\emptyset$, $A^b=\{0\}$, $A^e=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\overline{A}=\{0\}$

(4) $A^i=(0,1)$, $A^b=\{0,1\}$, $A^e=\mathbf{R}\setminus[0,1]$, $\overline{A}=[0,1]$

(5) $A^i=(0,1)$, $A^b=\{0,1\}$, $A^e=\mathbf{R}\setminus[0,1]$, $\overline{A}=[0,1]$

(6) $A^i=(0,1)$, $A^b=\{0,1\}$, $A^e=\mathbf{R}\setminus[0,1]$, $\overline{A}=[0,1]$

(7) $A^i=(0,1)$, $A^b=\{0,1\}$, $A^e=\mathbf{R}\setminus[0,1]$, $\overline{A}=[0,1]$

(8) $A^i=(0,\infty)$, $A^b=\{0\}$, $A^e=(-\infty,0)$, $\overline{A}=[0,\infty)$

(9) $A^i=(0,\infty)$, $A^b=\{0\}$, $A^e=(-\infty,0)$, $\overline{A}=[0,\infty)$

(10) $A^i=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $A^b=\{0\}$, $A^e=\emptyset$, $\overline{A}=\mathbf{R}$

32. 次の各集合について、内部、境界、外部、閉包を求めよ。
(1) $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}^2$ (3) $\{(0,0)\}$ (4) 有限個の点集合 $\{\vec{x}_i; 1\le i\le n\}$ (5) $(0,1)\times(2,3)$
(6) $[0,1]\times(2,3)$ (7) $[0,1]\times[2,3]$ (8) $\{(x,y); 1<x^2+y^2<4\}$ (9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$
(10) $\{(x,y); x^3\le y\le x^2\}$ (11) $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (12) $\{(1/n,1/n); n\in\mathbf{N}\}$

結果のみ

(1) $A^i=\emptyset$, $A^b=\emptyset$, $A^e=\mathbf{R}^2$, $\overline{A}=\emptyset$

(2) $A^i=\mathbf{R}^2$, $A^b=\emptyset$, $A^e=\emptyset$, $\overline{A}=\mathbf{R}^2$

(3) $A^i=\emptyset$, $A^b=\{(0,0)\}$, $A^e=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}t$, $\overline{A}=\{(0,0)\}$

(4) $A^i=\emptyset$, $A^b=\{\vec{x}_i;1\le i\le n\}$, $A^e=\mathbf{R}^2\setminus\{\vec{x}_i;1\le i\le n\}t$, $\overline{A}=\{\vec{x}_i;1\le i\le n\}$

(5) $A^i=(0,1)\times(2,3)$, $A^b=\{(0,y);2\le y\le 3\}\cup\{(1,y);2\le y\le 3\}\cup\{(x,2);0\le x\le 1\}\cup\{(x,3);0\le x\le 1\}$, $A^e=\mathbf{R}^2\setminus[0,1]\times[2,3]$, $\overline{A}=[0,1]\times[2,3]$

(6) (5) と同じ

(7) (5) と同じ

(8) (5) と同じ

(9) $A^i=\{(x,y);1<x^2+y^2<4\}$, $A^b=\{(x,y);x^2+y^2=1$ または $x^2+y^2=4\}$, $A^e=\{(x,y);x^2+y^2<1$ または $x^2+y^2>4\}$, $\overline{A}=\{(x,y);1\le x^2+y^2\le 4\}$

(10) $A^i=(0,\infty)\times(0,\infty)$, $A^b=\{(x,0);x\ge 0\}\cup\{(0,y);y\ge 0\}$, $A^e=\{(x,y);x<0$ または $y<0\}$, $\overline{A}=[0,\infty)\times[0,\infty)$

(11) $A^i=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $A^b=\{(0,0)\}$, $A^e=\emptyset$, $\overline{A}=\mathbf{R}^2$

(12) $A^i=\emptyset$, $A^b=A\cup\{(0,0)\}$, $A^e=\mathbf{R}^2\setminus(A\cup\{(0,0)\})$, $\overline{A}=A\cup\{(0,0)\}$

33. 例にならって、領域 D を 2 通りに表示せよ。
例: x 軸および半円周 $x^2+y^2=1$, $y>0$ によって囲まれる領域

$$D=\left\{(x,y);-1<x<1,\ 0<y<\sqrt{1-x^2}\right\}=\left\{(x,y);0<y<1,\ -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

(1) 直線 $y=x$, $y=0$, $x=1$ によって囲まれる領域

(2) 直線 $y=2x$, $y=2$, $x=0$ によって囲まれる領域

(3) 直線 $y=2-x$, $y=0$ および曲線 $y=x^2$ によって囲まれる領域

(4) 直線 $y=2$, $x=0$ および曲線 $y=\sqrt{x}$ によって囲まれる領域

(5) 直線 $y=x+1$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$, $y=0$ によって囲まれる領域

(6) $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする四角形の内部

34. $\mathbf{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と a, $b\in\mathbf{R}^N$ に対して、次を示せ (内積の連続性)。

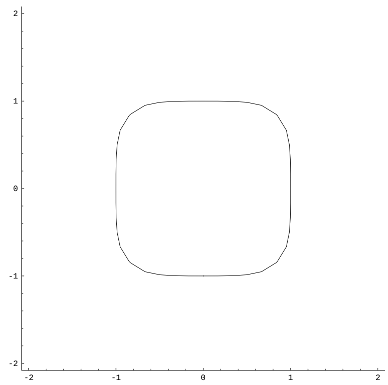
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=b\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(a,b).$$

解答　(準備中)

35.　次の A_1, A_2 の各々につき、簡単に図示し、それが有界集合かどうか、開集合かどうか、閉集合かどうか、調べよ。$A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2/4-y^2/9<1\}$, $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^4+y^4=1\}$, $A_3=\{(x,y); x^2+\dfrac{y^2}{4}<1\}$, $A_4=\{(x,y); x^2-y^2=1\}$

解答　A_1 は双曲線 $x^2/4-y^2/9=1$ (2 本の曲線) ではさまれる (言い換えると、原点を含む) 領域 (境界含まず) で、有界ではなく、開集合であり、閉集合ではない。(境界が 2 直線 $x/2\pm y/3=0$ を漸近線とする双曲線であることは良いとして、原点を含まない 2 つの領域と間違えた人が結構いた。$(x,y)=(0,0)$ を代入して符号を調べれば簡単に分かると思うのだが…)

A_2 は単位円の 4 角を出っ張らせた (正方形の 4 角を丸めたという方が分かりよい？) 感じの閉曲線で、有界であり、開集合ではなく、閉集合である。



36.　$\mathbf{R}$ の任意の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つことを示せ。

解答　K を $\mathbf{R}$ の有界閉集合で、空でないものとする。$f(x)=x$ $(x\in K)$ で定めた $f\colon K\to\mathbf{R}$ は連続だから、K 上最大値 M と最小値 m を持つ。$M=\max K$, $m=\min K$ である。 ■

次の内容 (命題) は、授業で利用することがある (年度による)。

37.　$A\subset\mathbf{R}$, $A\neq\emptyset$ とするとき、次の (1), (2) を示せ。

(1) A の上限が存在しないならば ($\sup A=\infty$ ならば)、数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で、(i) $\forall n\in\mathbf{N}\ x_n\in A$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ を満たすものが存在する。

(2) A の上限 U が存在するならば ($\sup A=U\in\mathbf{R}$ ならば)、数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で、(i) $\forall n\in\mathbf{N}$ $x_n\in A$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=U$ を満たすものが存在する。

2 つを次のようにまとめることが出来る。

「$A\subset\mathbf{R}$, $A\neq\emptyset$ ならば、$\exists\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. (i) $\forall n\in\mathbf{N}\ x_n\in A$, (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sup A$」

少し手助け　仮定を論理式で書いてみるのが第一歩。後は自力でゴールまでたどり着こう。

- A の上限が存在しない $\Leftrightarrow$ A は上に有界でない $\Leftrightarrow$ $\forall U\in\mathbf{R}\ \exists x\in A\quad x>U$.

- U が A の上限 $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in A \quad x \leq U \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad U - \varepsilon < x \end{array}$