多変数の微分積分学1 第13回

桂田 祐史

2013年7月15日

目 次

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

9 極値問題の補足

9.1 グラフを見る

2変数の場合に典型的な2次形式 (行列が対角行列) の場合を見てみる。プリントを配布する。鞍点 (峠点, saddle point) の場合を納得すること。

$f_3(x,y) = x^2 - y^2$ と $f_4(x,y) = 2xy$ は座標系を回転させると重なる (つまりグラフは合同である)。

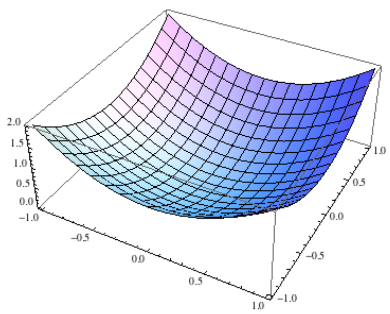

図 1: $f_1(x,y) = x^2 + y^2$

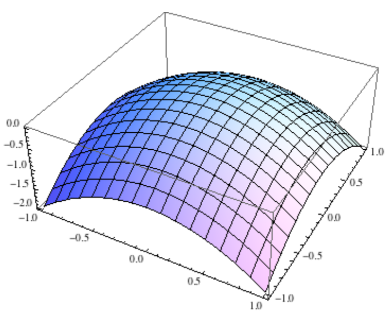

図 2: $f_2(x,y) = -x^2 - y^2$

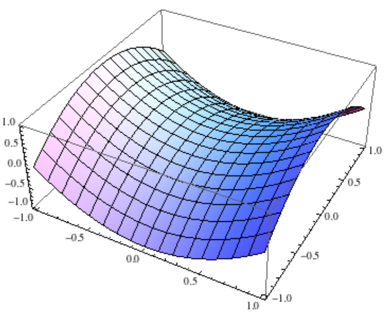

図 3: $f_3(x,y) = x^2 - y^2$

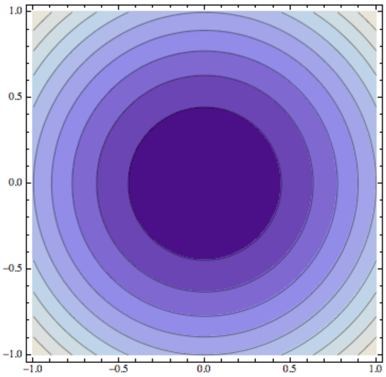

図 4: $f_1(x, y) = x^2 + y^2$

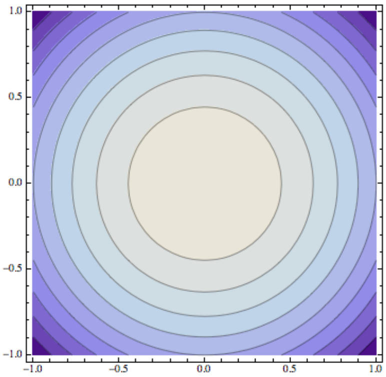

図 5: $f_2(x, y) = -x^2 - y^2$

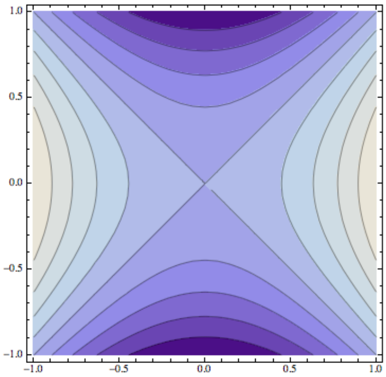

図 6: $f_3(x, y) = x^2 - y^2$

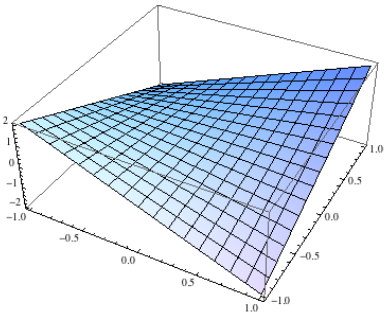

図 7: $f_4(x, y) = 2xy$

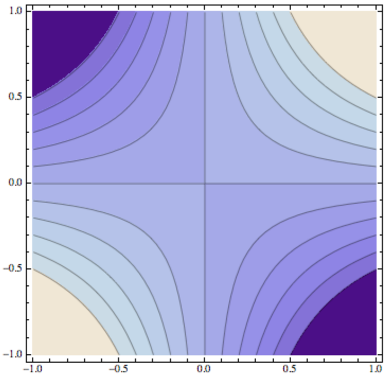

図 8: $f_4(x, y) = 2xy$

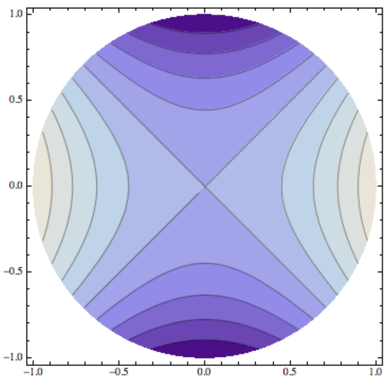

図 9: $f_3(x, y) = x^2 - y^2$

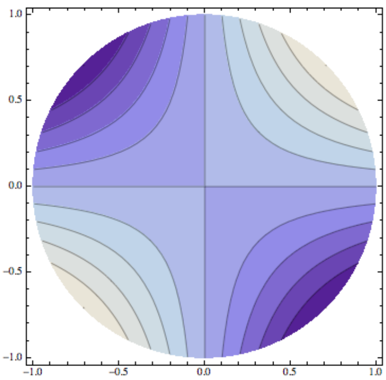

図 10: $f_4(x, y) = 2xy$

9.2 Hesse 行列が "どれでもない" 場合

$f_5(x,y) = x^4 + y^4$, $f_6(x,y) = -x^4 - y^4$, $f_7(x,y) = x^4 - y^4$ は、いずれも $f'(0,0) = 0$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を満たすが、これは正値でも負値でも不定符号でもない。それぞれ狭義の極小 ($(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f_5(x,y) = x^4 + y^4 > 0 = f_5(0,0)$)、狭義の極大 ($(x,y) \neq (0,0)$ ならば $f_6(x,y) = -(x^4 + y^4) < 0 = f_6(0,0)$)、極値でない ($x, y \neq 0$ ならば $f_7(x,0) = x^4 > 0 > -y^4 = f_7(0,y)$)。2 階までの微分をしらべても分からないこともある、ということ。

9.3 連立方程式の解き方

少し問題を解いて練習して下さい。

「未知数の消去」が基本だけれど、対称性に目をつけて、辺々加えたり、引いてみたりするとうまく行く場合がある。例として、問 11 に現れた

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3xy^2 - x &= 0, \\ 2y^3 + 3x^2y - y &= 0. \end{aligned}$$

辺々引き算して $(x-y)(x^2 - 2xy + y^2 - 1) = 0$. さらに

$$(x-y)(x-y+1)(x-y-1) = 0.$$

これから $x - y = 0, 1, -1$.

10 陰関数定理と逆関数定理 — 存在定理

兄弟の関係にある「陰関数定理」と「逆関数定理」を駆け足で説明する。

どちらも

「指定された点の近くで (局所的に) 関数 (それぞれ陰関数、逆関数) が存在する」

という存在定理である。

存在定理というと、2 年生にはなじみが薄いかも知れないが、まったくの初めてというわけではなくて、

1. 中間値の定理「連続関数 $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ が $f(a)f(b) < 0$ を満たすならば、$f(c) = 0$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する」
2. 代数学の基本定理「複素係数の n 次多項式 $a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ は複素数の範囲に少なくとも一つの根を持つ」
3. Weierstrass の最大値定理「コンパクト集合 K 上の実数値連続関数は、最大値を持つ」

という例 (どれも非常に重要) がある。

陰関数定理も逆関数定理も「関数の存在」を主張している。証明においては、x が与えられたときに $F(x,y) = 0$ を y について解く、y が与えられたときに $f(x) = y$ を x について解く、と方程式の解の存在をするのが関門である。

10.1　逆関数定理超特急

逆関数については、

「写像 f が逆写像 f^{-1} を持つためには、f が全単射であることが必要十分」

というのが基本中の基本である。

与えられた関数 f そのものが全単射でなくても、それを適当に制限したものが全単射になり、その逆写像 (逆関数) が便利、というのが良くある話である。

例 10.1 (高校数学からの例) $f\colon \mathbf{R}\ni x\mapsto x^2\in\mathbf{R}$ は全射でも単射でもないが、その制限

$$\widetilde{f}\colon [0,\infty)\ni x\mapsto x^2\in[0,\infty)$$

は全単射で、その逆関数 f^{-1} はいわゆるルートである。

$$f^{-1}(y)=\sqrt{y}\quad (y\in[0,\infty)).$$

似たようなことは、exp と log, 各種逆三角関数であった。■

1 変数関数に対する逆関数の定理は簡単であるので、概略を述べてみよう。

例 10.2 (1 変数の逆関数の定理) I が $\mathbf{R}$ の開区間、$f\colon I\to\mathbf{R}$ は C^1 級、$a\in I$, $f'(a)\neq 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&(\exists U\subset I: a \text{ を含む開区間})\,(\exists V: b:=f(a) \text{ を含む開区間})\\ &\qquad \widetilde{f}\colon U\ni x\longmapsto f(x)\in V\quad \text{は全単射で逆関数も } C^1 \text{ 級}\end{aligned}$$

が成り立つ。実際 $f'(a)\neq 0$ であるから、$f'(a)>0$ or $f'(a)<0$. $f'(a)>0$ の場合、f' の連続性から、$\exists\varepsilon>0$ s.t. $f'>0$ on $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$. このとき f は $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ で狭義単調増加である。このとき、$U:=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $V=(f(a-\varepsilon),f(a+\varepsilon))$ とすると、$\widetilde{f}$ は明らかに定義できて、単射である。また中間値の定理を用いて全射であることが分かる。ゆえに $\widetilde{f}$ は全単射であるから逆関数が存在する。少し頑張ると $\widetilde{f}^{-1}$ の連続性と、微分可能性、$\widetilde{f}^{-1}$ の連続性が証明できる (詳しくは桂田 [1] の付録 H.2「1 変数の逆関数の定理」)。■

逆関数の定理は、この例の素直な多次元化であるが、その前に線形代数の復習をしておく。

例 10.3 (線型写像が全単射となる条件) 有限次元線型空間の間の線型写像を考える。一般形は、n, $m\in\mathbf{N}$, $A\in M(m,n;\mathbf{R})$ として、

$$f\colon \mathbf{R}^n\ni x\mapsto Ax\in\mathbf{R}^m$$

である。このとき、有名な次元定理

$$\operatorname{rank} f=n-\dim\ker f$$

が成り立つ。

- f が全射 $\iff \operatorname{rank} f=m$
- f が単射 $\iff \dim\ker f=0$

であるから、

$$\begin{aligned} f\text{が全単射} &\Longrightarrow (\operatorname{rank} f = m \quad \text{and} \quad \dim\ker f = 0) \\ &\Longrightarrow m = n. \end{aligned}$$

ゆえに全単射であるためには、$m = n$ が必要である。そこで以下 $m = n$ を前提条件とする。このとき

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\Longleftrightarrow \operatorname{rank} f = m(= n) \\ &\Longleftrightarrow \dim\ker f = 0 \\ &\Longleftrightarrow f \text{ は単射} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ は全単射} \\ &\Longleftrightarrow f^{-1} \text{ が存在} \\ &\Longleftrightarrow A^{-1} \text{ が存在} \\ &\Longleftrightarrow \det A \neq 0. \end{aligned}$$

後のために次のように覚えておこう。「全単射が存在するために、定義域と終域の空間次元が等しいことが必要で、それが成り立つという前提のもとで、全単射であるためには行列式が 0 でないことが必要十分である」 ■

定理 10.4 (逆関数定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ は C^1 級、$a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ とするとき、($\exists U$: a を含む開集合) ($\exists V$: $b = f(a)$ を含む開集合) s.t. $\widetilde{f} := f|_U : U \ni x \mapsto f(x) \in V$ は全単射で、逆関数 $\widetilde{f}^{-1}\colon V \to U$ も C^1 級である。

時間の関係で、証明は涙を飲んで省略するが (苦笑)、逆関数の導関数については、既に学んだ逆関数の微分法が成立することを注意 (「思い出せ！」) しておく。

10.2 陰関数についてのイントロ (2 変数関数版)

直観的には、方程式 $F(x, y) = 0$ は、(例外的な状況を除けば) 平面曲線を定め、適当に範囲を限定すると、変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ を定めることがある (このとき、その関数 $y = \varphi(x)$ を $F(x, y) = 0$ の定める陰関数と呼ぶ)。

いくつか実例を並べてみよう。

(1) $F(x, y) = y - \varphi(x)$ のとき、$y = \varphi(x)$. $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、関数 φ のグラフである。

(2) $F(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$) のとき、$F(x, y) = 0$ の定める曲線は直線である。$b \neq 0$ であれば、$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ と解ける。

(3) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき、$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. $F(x, y) = 0$ の定める曲線は、原点を中心とする半径 1 の円周である。(一般に、$F(x, y)$ が x と y の 2 次多項式であるならば、$F(x, y) = 0$ の定める曲線は、いわゆる 2 次曲線で、具体的には、空集合、1 点、2 直線、楕円、放物線、双曲線である — 線形代数のテキストを見よ)。

(4) $F(x, y) = y^2 - x^2(x - a)$ (a は実定数) のとき、$F(x, y) = 0$ は、$y = 0$ ($x = 0$ のとき), または $y = \pm x\sqrt{x - a}$ ($x \geq a$ のとき) と解ける[1]。$F(x, y) = 0$ の定める曲線は、

[1] $y^2 = x^2(x - a)$ としたとき、実数の範囲で解ける $\Leftrightarrow x^2(x - a) \geq 0 \Leftrightarrow [x = 0$ または $x \geq a]$ であることに注意せよ。$x = 0$ のときは $y = 0$, $x \geq a$ のときは、$y = \pm\sqrt{x^2(x - a)} = \pm|x|\sqrt{x - a} = \pm x\sqrt{x - a}$.

(a) $a<0$ のときは原点で自己交差する曲線 (原点を結節点と呼ぶ)

(b) $a=0$ のときは原点で尖っている曲線 (原点を尖点と呼ぶ)

(c) $a>0$ のときは原点と、$x \geq a$ の範囲にある曲線 (原点を孤立点と呼ぶ)

```
g0=ListPlot[{{0,0}}]
myg[a_]:=ContourPlot[y^2-(x-a)x^2==0,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourStyle->Red]
g=Show[myg[1],g0]
```

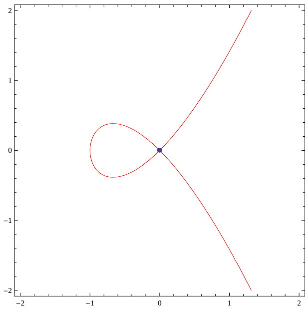

図 11: $a=-1$

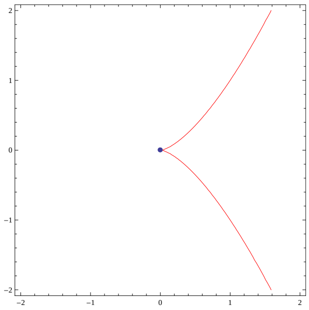

図 12: $a=0$

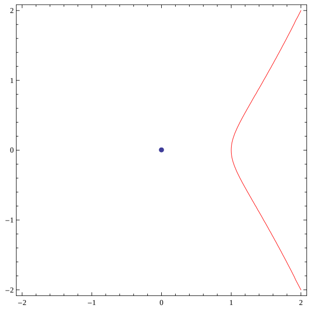

図 13: $a=1$

(5) (ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, 1694 年) $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ のとき、いわゆるヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート (連珠形) $F(x,y)=0$ は y についての 4 次方程式であるが、2 次方程式を解くことを 2 回行って、y について解ける。

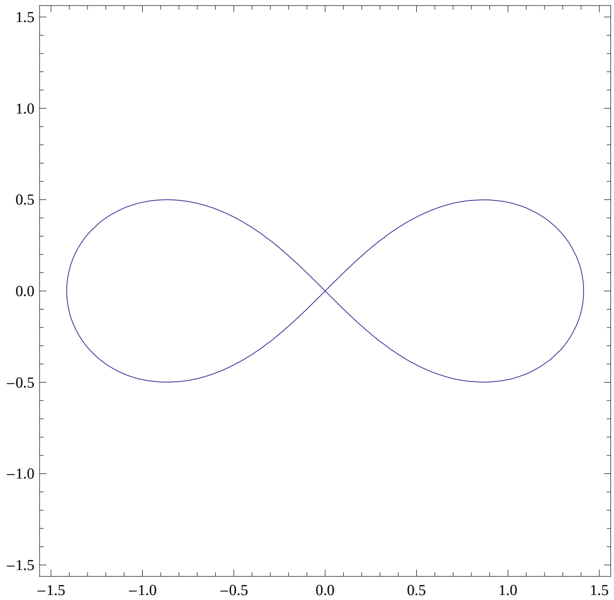

図 14: レムニスケート $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$

(6) (デカルトの葉線, folium cartesii, 1638 年) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$ のとき、$F(x,y)=0$ の定める曲線は、いわゆるデカルトの葉線で、原点において自分自身と交差する曲線である (例 10.8, p.9)。$F(x,y)=0$ は y についての 3 次方程式である。これは y について簡単に解くことは…?出来ないと思ったら、Mathematica は答を返して来た。あ、そうか。でも使いにくそう。

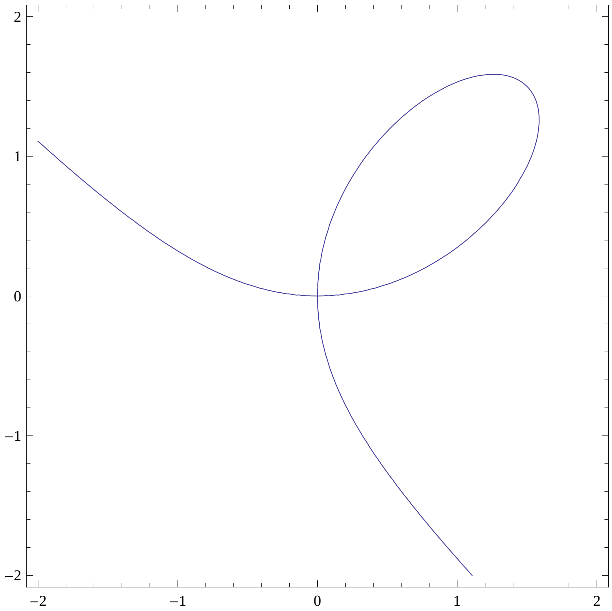

図 15: Decartes の葉線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

余談 10.1 (Decartes の葉線の伝統的な描き方) 極座標を使うと、

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

という極方程式がすぐに得られる。あるいは $y = tx$ として、

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

という有理パラメーター表示も得られる。$x + y = -1$ が漸近線になっている。 ■

次のことが分かる。

- F によっては、$F(x, y) = 0$ を式変形で、y について具体的に解くことは不可能である。
  → 抽象的な「存在定理[2]」が望み得るゴール。
- 1 つの x に 2 つ以上の y が対応したり、逆に 1 つも y がなかったりする。
  → 最初に $F(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) があったとして、その点の「近傍」で考えることにする。とっかかりは要求することにする。
- 1 つの x に複数の y が対応する場合も、注目している点を中心とした十分小さい範囲に限れば、1 つの x に 1 つの y が対応するようになることもある。
  → a を含む開集合 U, b を含む開集合 V をとり、$U \times V$ (イメージとしてはウィンドウ) に考察を限定する、という方針で行く。

  もっとも、どんなに小さい範囲にしぼってもダメなこともある (その点で曲線が自己交差していたり、x について片側にしか対応する y がない)。うまく行くための十分条件はないか？
  → 実は $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ という条件が満たされれば OK.
- 陰関数の導関数は (そもそも存在するかはすぐには分からないことであるが、存在するならば)、合成関数の微分法で計算するのは簡単である。

[2]アナロジーとして、中間値の定理を思い出させる。

例: $x^2+y^2=1$ より、$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ だから、$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.
一般には、$F(x,\varphi(x))=0$ より、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \text{より} \quad \varphi'(x)=-\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)).$$

10.3 定理の陳述

以下 $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ が登場する。これはもちろん

$$\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n=\left\{(x,y);x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^m, y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n\right\}$$

であるから、

$$z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_m\\ z_{m+1}\\ \vdots\\ z_{m+n}\end{pmatrix}\quad(z_j\in\mathbf{R},\ j=1,2,\cdots,m+n)$$

全体の集合である $\mathbf{R}^{m+n}$ と同一視できる。そこで例えば $\Omega\subset\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ が開集合と言った場合はこの同一視によって Ω が $\mathbf{R}^{m+n}$ の開集合であることを意味する。単に (x,y) が $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ の要素であると言った場合は、特に断りがなければ $x\in\mathbf{R}^m$, $y\in\mathbf{R}^n$ であるとする。

さて、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ があるとき、

$$F=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}$$

と書けば、

$$F'(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

となるわけだが、m 列, n 列とブロックわけして、それぞれ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ と書く。すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

以下しばらくこの記号を使おう。

定理 10.5 (陰関数定理, implicit function theorem) Ω は $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\ni(x,y)\mapsto F(x,y)\in\mathbf{R}^n$ は C^1 級、$(a,b)\in\Omega$, $F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ が成り立つとする。このとき、a を含む $\mathbf{R}^m$ の開集合 U, b を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合 V, C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ で、以下の (0), (i), (ii), (iii) を満たすものが存在する。

(0) $U\times V\subset\Omega$.

(i) $\varphi(a)=b$.

(ii) $\forall(x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0\iff y=\varphi(x)$.

(iii) $\forall x\in U$ について、$\varphi'(x)=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$.

注意 10.6 (覚え方のヒント) 上の定理は、大事なことをひとまとめにしたものだが、最低限必要なことと、それから導かれることに分けた方が覚えやすいかも知れない。

短縮版陰関数定理

Ω は $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\ni(x,y)\mapsto F(x,y)\in\mathbf{R}^n$ は C^1 級、$(a,b)\in\Omega$, $F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ が成り立つならば、$\exists U$, $\exists V$, $\exists\varphi\in C^1(U;V)$ s.t.

(a) U は a の開近傍、V は b の開近傍で、$U\times V\subset\Omega$.

(b) $\forall(x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0\iff y=\varphi(x)$.

上の定理 10.5 に書いてあって、この短縮版に書いてないことを導こう。まず $F(a,b)=0$ と (b) から $\varphi(a)=b$ が導かれる。また (b) から $F(x,\varphi(x))=0$ が得られるが、F と φ が C^1 級であるから、$F_x(x,\varphi(x))+F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$. $\det F_y(a,b)\neq 0$ であるから、(a,b) の十分小さな近傍で $F_y(x,y)^{-1}$ が存在するので、$\varphi'(x)=-\left(F_y(x,\varphi(x))\right)^{-1}F_x(x,\varphi(x))$. ■

注意 10.7 (陰関数定理の条件 (ii) の言い換え「零点集合がグラフになる」) 定理 10.5 の (ii) は、「方程式が解ける」といういわば解析的な表現であるが、幾何学的な表現である次の (ii)' で置き換えることも出来る。

(ii)' $U\times V$ において、F の零点集合は φ のグラフに一致する: $N_F\cap(U\times V)=\operatorname{graph}\varphi$.

ここで N_F, $\operatorname{graph}\varphi$ はこれまでも登場した記号で、

$$N_F:=\{(x,y)\in\Omega; F(x,y)=0\},\quad \operatorname{graph}\varphi:=\{(x,\varphi(x)); x\in U\}.■$$

10.4 単純な例

既に述べたように、陰関数定理は広範な応用を持つが、ここではなるべく単純な例を紹介する。

例 10.8 [デカルトの葉線 (folium of Descartes, folium cartesii, 1694)] $a>0$ とするとき、$F(x,y):=x^3+y^3-3axy$, $P=\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{3a}{2}\right)$ とおく。点 P の十分小さな開近傍において、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを示し、その点における微分係数を求めよ。

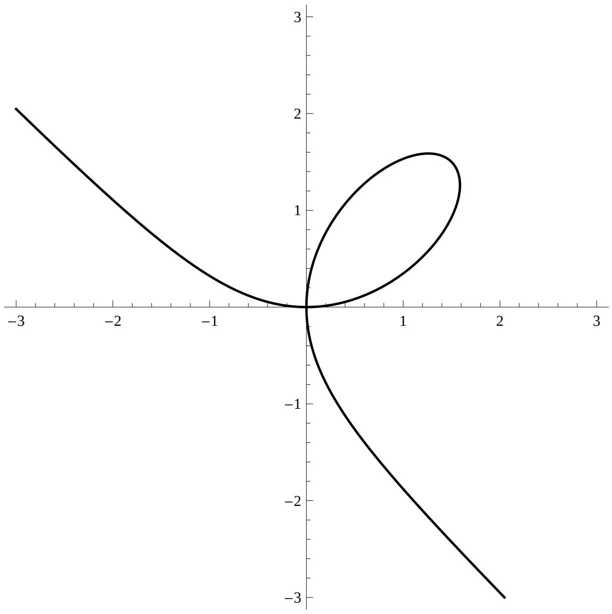

図 16: Mathematica による $F(x,y) := x^3 + y^3 - 3axy$ の零点集合 ($a = 2/3$ の場合)

```
ContourPlot[x^3+y^3-2 x y==0, {x, -2, 2}, Axes->True]
```

```
g = ContourPlot[x^3 + y^3 - 3 x y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  Frame -> None, Contours -> {0}, ContourShading -> None,
  ContourStyle -> Thickness[0.004], PlotPoints -> 100, Axes -> True]
```

解答　$F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は C^1 級で、

$$F\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)^3 + \left(\frac{3a}{2}\right)^3 - 3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4}\right)a^3 = 0,$$

$$F_y(x,y) = 3y^2 - 3ax, \quad F_y\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right) = 3\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{4} \neq 0$$

であるから、$\dfrac{3a}{2}$ の十分小さな開近傍 U と V が存在して、$U \times V$ で $F(x,y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ と解けて、$\varphi\colon U \to V$ は C^1 級となる。$F(x,\varphi(x)) = 0$ より、$F_x(x,\varphi(x)) + F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$ となるので、$\varphi'(x) = -\dfrac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$. $F_x(x,y) = 3x^2 - 3ay$, $F_x\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{3a}{2}\right) = \dfrac{9a^2}{4}$ であるから、

$$\varphi'\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{F_x\left(3a/2, 3a/2\right)}{F_y\left(3a/2, 3a/2\right)} = -\frac{9a^2/4}{9a^2/4} = -1. \blacksquare$$

注意 10.9 (陰関数の存在しない点) $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ であれば、(x_0,y_0) の近傍で、$y = \varphi(x)$ の形の陰関数が存在することが保証されるので、その形の陰関数の存在しない可能性がある点は、連立方程式 $F(x,y) = 0$, $F_y(x,y) = 0$ の解として得られる。実際に解くと、$(x,y) = (0,0), \left(2^{2/3}a, 2^{1/3}a\right)$. この後者は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ の場合の $(\pm a, 0)$ のような点であるが、原点 $(0,0)$ の方は、少し様子が違って、どんなに小さな開近傍を取っても、1 つの x に対して $F(x,y) = 0$ を満たす y が 3 つ存在したりする。いずれにせよ、$(0,0)$, $\left({}^{2/3}a, 2^{1/3}a\right)$ とも、そのいかなる近傍でも、$y = \varphi(x)$ の形の ($F(x,y) = 0$ の) 陰関数は存在しない。 $\blacksquare$

例 10.10 $F(x,y) := (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ とおく。

(1) 点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを陰関数定理を用いて示せ。(本当は、定理を使わないでも、2 次方程式を解けば陰関数が具体的に求まる。そういう単純な場合で、定理を使う練習をしましょう、ということである。)

(2) $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) のうちで、陰関数定理の仮定の成立しない点[3]を求めよ。

(3) 曲線 $F(x,y)=0$ 上の点で、その点における接線の傾きが 0 となる点を求めよ。

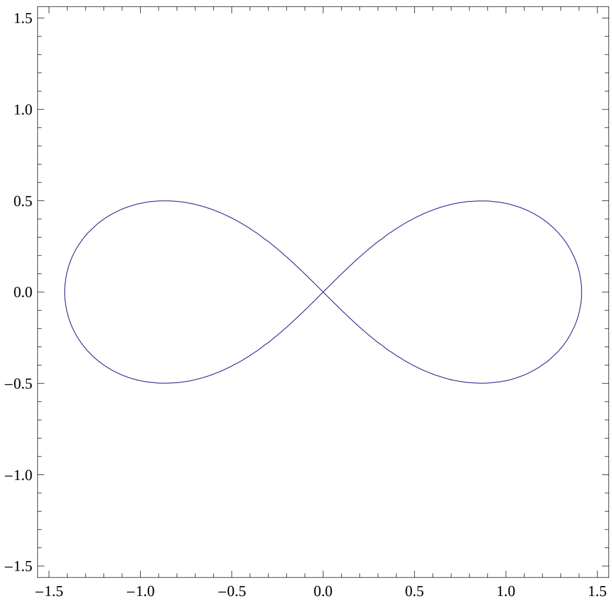

図 17: ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$

(p.**??**を見よ。)

例 10.11 連立方程式 $x+y+z+w=0$, $e^x+e^{2y}+e^z+e^w=4$ は、0 の十分小さな開近傍で x, y について解けることを証明せよ。

解答

$$X:=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad Y:=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
$$F_1(X,Y):=x+y+z+w, \quad F_2(X,Y):=e^x+e^{2y}+e^z+e^w-4,$$
$$F(X,Y):=\begin{pmatrix} F_1(X,Y) \\ F_2(X,Y) \end{pmatrix}$$

とおくと、$F\colon \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \ni (X,Y) \longmapsto F(X,Y)\in\mathbf{R}^2$ は C^1 級で、

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 2e^y \end{pmatrix}.$$

[3]ただし、陰関数としては $y=\varphi(x)$ の形のものを考える ($x=\psi(y)$ の形のものは考えない)。

これから

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

ゆえに $F(X,Y)=0$ は 0 の近傍で Y について解ける。いいかえると (x,y) について解ける。ついでに

$$\varphi'(X) = -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial X} = -\frac{1}{2e^{2y}-e^x} \begin{pmatrix} 2e^{2y} & -1 \\ -e^x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^z & e^w \end{pmatrix}$$

が得られる。■

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-2011.pdf` (2011).

[2] 桂田祐史：発展系の数値解析の続き, `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0-add.pdf` (1997 年〜).