平面曲線

桂田 祐史

2002年6月30日–

http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/plane-curve/

1　平面曲線の表現法

1.1　パラメーター曲線

1.2　1変数関数のグラフ

1.3　2変数関数の零点集合

2　弧長、面積

3　微分幾何

4　コンピューターで描く

4.1　情報へのポイント

- gnuplot については、『gnuplot 入門』[1]
- Mathematica については、『Mathematica 入門』[2]

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/howto/intro-gnuplot/
[2] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2006/mathematica/

4.2 gnuplot

4.2.1 1 変数関数のグラフ

```
gnuplot> plot sin(x),cos(x)
gnuplot> f(x)=x**3+2*x**2+3*x+4
gnuplot> plot [-4:4] f(x)
gnuplot> plot [-pi/2:pi/2] [-10:10] tan(x)
gnuplot> set plot sin(1000*x)
gnuplot> show samples
gnuplot> set samples 4000
gnuplot> set plot sin(1000*x)
```

```
gnuplot> f(x)=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)   ← 標準正規分布の確率密度関数を定義
gnuplot> plot [-3:3] f(x)
```

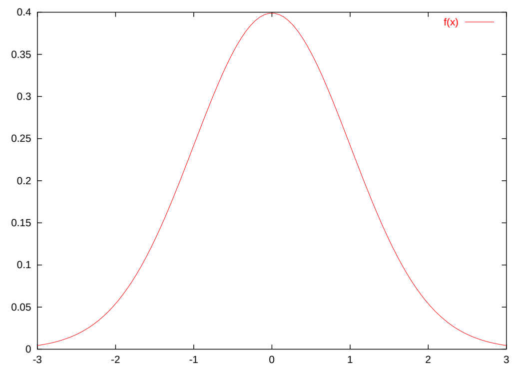


図 1: 正規分布の確率密度関数 ($\pm 3\sigma$ の範囲)

4.2.2 2 変数関数の零点集合

```
gnuplot> set contour
gnuplot> set nosurface
gnuplot> set view 0,0
gnuplot> set isosamples 100,100
gnuplot> set cntrparam levels incremental 0,1,0
gnuplot> splot x**2-y**2
```

4.2.3 パラメーター曲線

```
gnuplot> set parametric
gnuplot> plot t*cos(t),t*sin(t)
gnuplot> plot [-pi:pi] cos(3*t),sin(4*t)
```

4.3 Mathematica

4.3.1 1 変数関数のグラフ

```
In[1]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-Pi,Pi}]
In[2]:= f[x_]:=x^3+2x^2+3x+4
In[3]:= Plot[f[x],{x,-4,4}]
In[4]:= Plot[Sin[1000*x],{x,0,Pi},PlotPoints->4000]
```

4.3.2 2 変数関数の零点集合

ContourPlot[] で等高線を描く

```
In[]:= ContourPlot[x^2 -y^2,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourShading->None]
```

ImplicitPlot[] で陰関数を描く

```
In[]:= Needs["Graphics`ImplictiPlot`"]
In[]:= ImplictiPlot[x^2 -y^2==0,{x,-2,2}]
```

4.3.3 パラメーター曲線

```
In[]:= ParametricPlot[t*Cos[t],t*Sin[t], {t,-10,10}]
```

4.4 ヒント

双曲線 $x^2/4 - y^2 = 1$ と、その接線 (傾き -1 の) を描く。陰関数のグラフ描画と、傾きが分かりやすいように縦横の縮尺を揃えること、二つ以上のものを一つにまとめる、などのテクニック。

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
g = ImplicitPlot[x^2/4 - y^2 == 1, {x, -6, 6},
                 PlotRange -> {{-6, 6}, {-3, 3}},
                 AspectRatio -> 1/2]
t = Plot[{-x + Sqrt[3], -x - Sqrt[3]}, {x, -6, 6}]
gt = Show[g, t]
Export["c:/home/mk/nantoka.eps", gt]
```

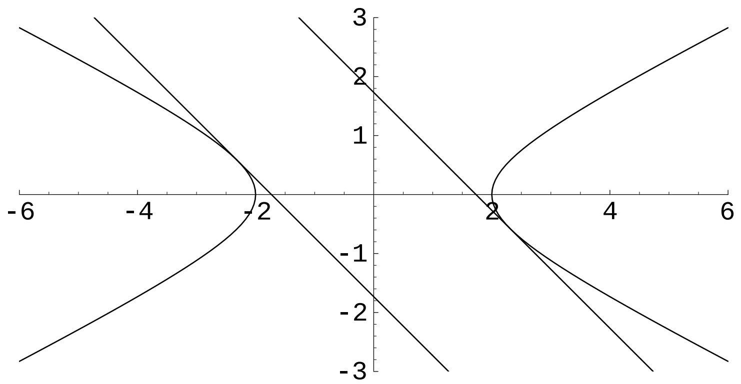


図 2: 双曲線とその接線

4.5 Maple

4.5.1 1 変数関数のグラフ

```
> plot([sin(x),cos(x)],x=-Pi..Pi)
>  f(x):=x^3+2x^2+3x+4;
> plot(f(x),x=-4..4);
> plot(sin(1000*x), x=0..Pi, numpoints=4000);
```

4.5.2 2 変数関数の零点集合

```
> with(plots);
> contourplot(x**2-y**2,x=-2..2,y=-2..2);
```

```
> with(plots);
> implicitplot(x**2-y**2=0,x=-2..2,y=-2..2);
```

4.5.3　パラメーター曲線

```
> plot([t*cos(t),t*sin(t),t=0..2*Pi]);
> plot([(t^2-1)/(t^2+1),2*t/(t^2+1),t=-infinity..infinity],numpoints=100);
```

5　円錐曲線

5.1　楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

円 $x^2+y^2=b^2$ を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍したものと考えると、

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta\quad(\theta\in[0,2\pi])$$

というパラメーター表示を発見するのは簡単であろう。

```
set parametric
set size ratio -1
a=3
b=2
plot [0:2*pi] a*cos(t),b*sin(t)
```

```
a=3; b=2; ParametricPlot[{a Cos[t],b Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```

5.2　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x=\pm a\cosh t,\quad y=b\sinh t\quad(t\in\mathbf{R})$$

```
set parametric
set size ratio -1
a = 3; b = 2;
ParametricPlot[{{a Cosh[t], b Sinh[t]},
                {-a Cosh[t], b Sinh[t]}},
                {t, -3, 3},
                PlotRange -> {{-10*a, 10*a}, {-10*b, 10*b}},
                AspectRatio -> b/a]
```

10 と 3 はマジックナンバーみたいでイヤだけど、$\cosh 3 = 10.06\cdots$ だから、ということです。

6 平面曲線紳士録

6.1 Cassini の橙形

2 定点からの距離の積が一定である点の軌跡は Cassini の橙形 (Cassini の卵形線, Cassini oval, oval of Cassini) である。Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) にちなんで名付けられた。

ちょっと整理

平面上の 2 定点からの距離の和、差、積、商が一定である点の軌跡を求める問題は有名である。

- 和が一定 ⋯ 楕円
- 差が一定 ⋯ 双曲線
- 積が一定 ⋯ Cassini の橙形
- 商 (比) が一定 ⋯ Apollonius[a] の円 (特別な場合として垂直二等分線)

[a]Apollonius ($\mathrm{A}\pi o\lambda\lambda\omega\nu\iota os$, B.C.262(245?)–190 頃.), Pergaeus, 小アジアの南海岸にあるパンフィリア (Pamphylia) のペルガに生まれ、アレキサンドリアで没す。アレキサンドリアで (ユークリッドに？) 学ぶ。円錐曲線について 8 冊の著作を著わす (ある種の座標系を利用していたため、「解析幾何の要素がある」という評もある)。記数法の改良も行った。

二定点を $(\pm a, 0)$ として、距離の積を b^2 とすると、

$$\left[(x-a)^2+y^2\right]\left[(x+a)^2+y^2\right]=b^4$$

という方程式が得られる。

$$(x^2+y^2+a^2)^2=4a^2x^2+b^4.$$

極形式では

$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4=b^4.$$

b が小さく、$b<a$ ならば二つの連結成分からなり、$a\le b$ ならば連結な曲線である。

$b=a$ ならば、$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ となるので、$a':=\sqrt{2}a$ とおくと

$$(x^2+y^2)^2=a'^2(x^2-y^2)$$

となる。これはベルヌーイのレムニスケート (lemniscate of Bernoulli) と呼ばれ、8 の字形をしている。

$b>a$ ならば正則な閉曲線である。特に $a<b<\sqrt{2}a$ ならば凹みのある閉曲線、$b\ge\sqrt{2}a$ ならば凸閉曲線である。

2 変数関数のレベルセットを描きたい場合、Mathematica では、`ImplicitPlot[]` が利用できる。

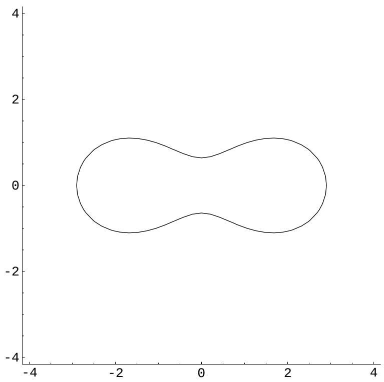


図 3: Cassini の oval ($a = 2$, $b = 2.1$)

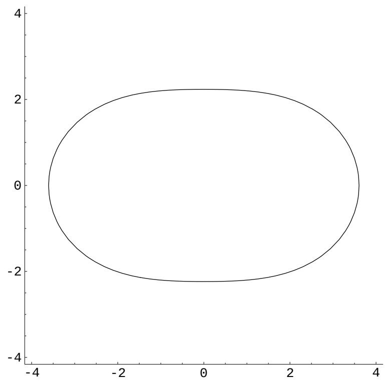


図 4: Cassini の oval ($a = 2$, $b = 3$)

Decartes の葉線, レムニスケート, Cassini の橙形を描く

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]  (最初にこのオマジナイが必要)

decartes[a_]:=ImplicitPlot[x^3+y^3-3 a x y==0,{x,-4,4},{y,-4,4}]
lemniscate[a_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2)^2==a^2(x^2-y^2),{x,-4,4},{y,-4,4}]
limason[a_,b_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2-a x)^2==b^2(x^2+y^2),{x,-4,4},{y,-4,4}]
cassini[a_,b_]:=ImplicitPlot[(x^2+y^2+a^2)^2==4a^2x^2+b^4,{x,-4,4},{y,-4,4}]

g=lemniscate[4]                  (a=4 のレムニスケートを描く)
SetDirectory[$HomeDirectory <> "\My Documents"]]
Export["lemniscate.eps", g]
```

なお、ここでは x, y 両方の範囲を指定したが、こうすると内部で `ContourPlot[]` を利用して等高線を描画する。これに対して、 x または y の一方のみの範囲を指定すると、`Solve[]` を利用して曲線を描画する。この方が処理は重いが、結果はきれいになる (そうである)。

6.2 螺旋

6.2.1 Archimedes の螺旋

極形式で

$$r = a\theta$$

という方程式で与えられる。

蚊取り線香曲線と言った人も。ホースやロープを巻いたりして出来る。

6.2.2 放物螺旋

$$r = a\sqrt{\theta}$$

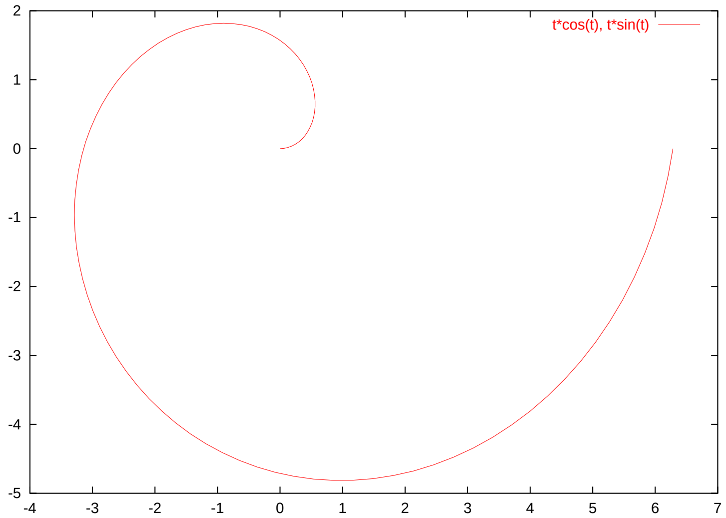


図 5: set parametric; plot [0:2*pi] t*cos(t),t*sin(t)

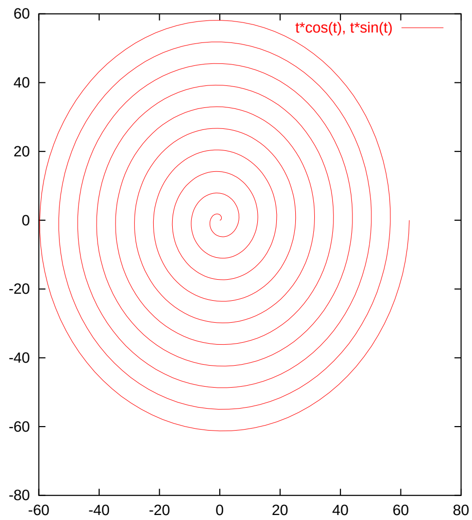
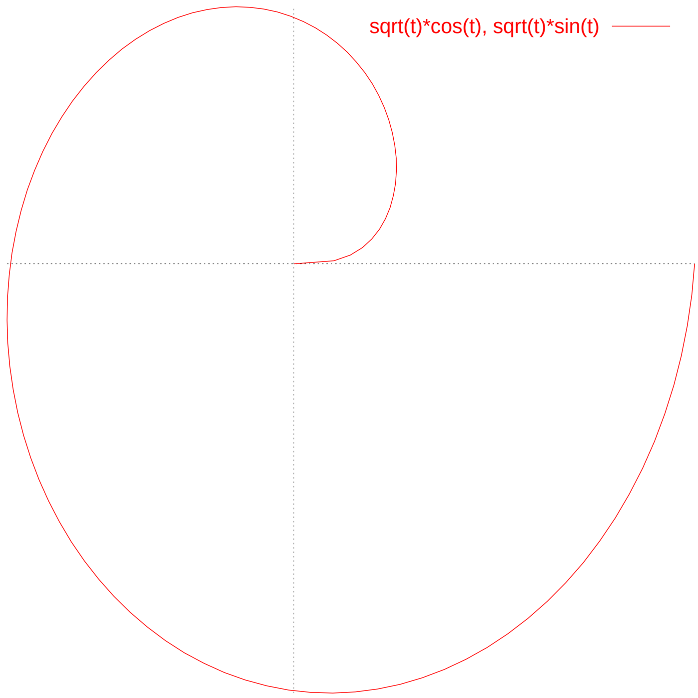


図 6: `set parametric; plot [0:20*pi] t*cos(t),t*sin(t)`



6.2.3 ヤコブ・ベルヌーイの螺旋、対数螺旋、等角螺旋

$$r = ae^{b\theta}$$

オーム貝、アンモナイトのような巻き貝の形。

曲線上の点の座標は

$$\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{b\theta}\cos\theta \\ ae^{b\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

であるから、接線ベクトルは

$$\varphi'(\theta) = \begin{pmatrix} ae^{b\theta}(b\cos\theta - \sin\theta) \\ ae^{b\theta}(b\sin\theta + \cos\theta) \end{pmatrix}.$$

原点から接点に向う線分と、接線のなす角を α とすると、

$$\cos\alpha = \frac{(b\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta + (b\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{(b\cos\theta - \sin\theta)^2 + (b\sin\theta + \cos\theta)^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}.$$

これが θ によらない定数であることが、等角螺旋という名前の由来である。

力学系

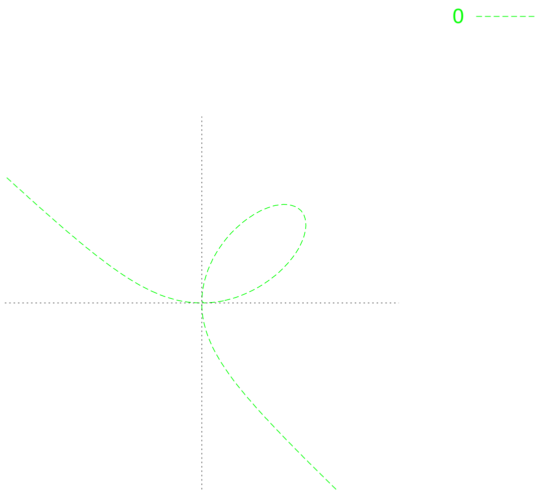
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の解曲線 (相平面における軌跡) も対数螺旋になる。

6.3 Descartes の正葉線

Descartes の正葉線 (デカルトの葉形, folium of Descartes, 1638 年)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



$y = tx$ とおくと、有理パラメーター表示

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

を得る。

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すると、極形式の表示

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$

を得る。

gnuplot で

```
a=1
f(x,y)=x**3+y**3-3*a*x*y
set xrange [-3*a:3*a]
set yrange [-3*a:3*a]
set view 0,0
set isosample 100,100
set size square
set cont base
set cntrparam level incre 0,0.1,0
unset surface
set nokey
#set border 0
#set noxtics
#set noytics
set xzeroaxis lt 0
set yzeroaxis lt 0
splot f(x,y)
```

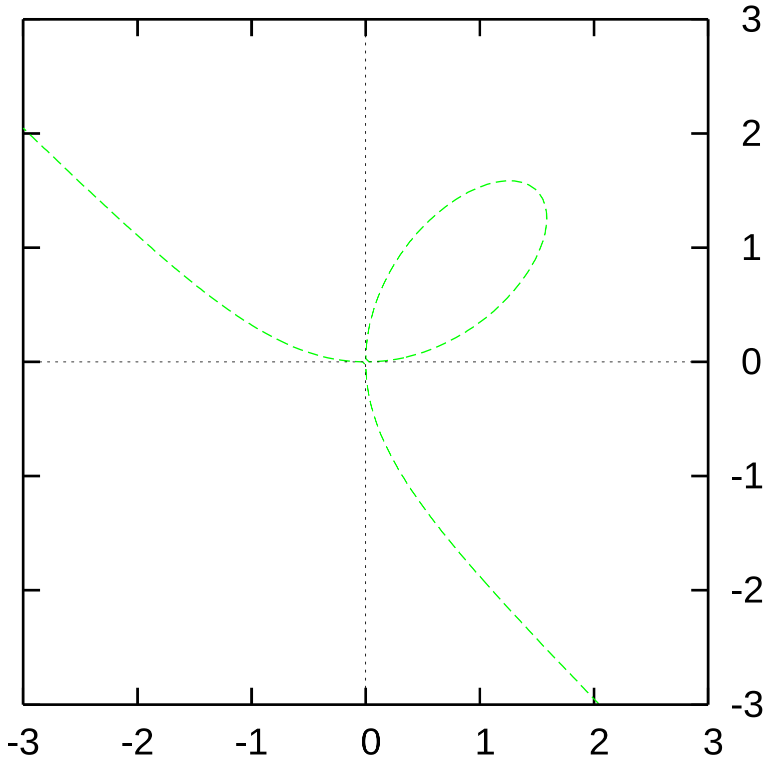


図 7: gnuplot

Mathematica で

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
g = ImplicitPlot[x^3 + y^3 - 3 x y == 0, {x, -2.5, 2}]
```

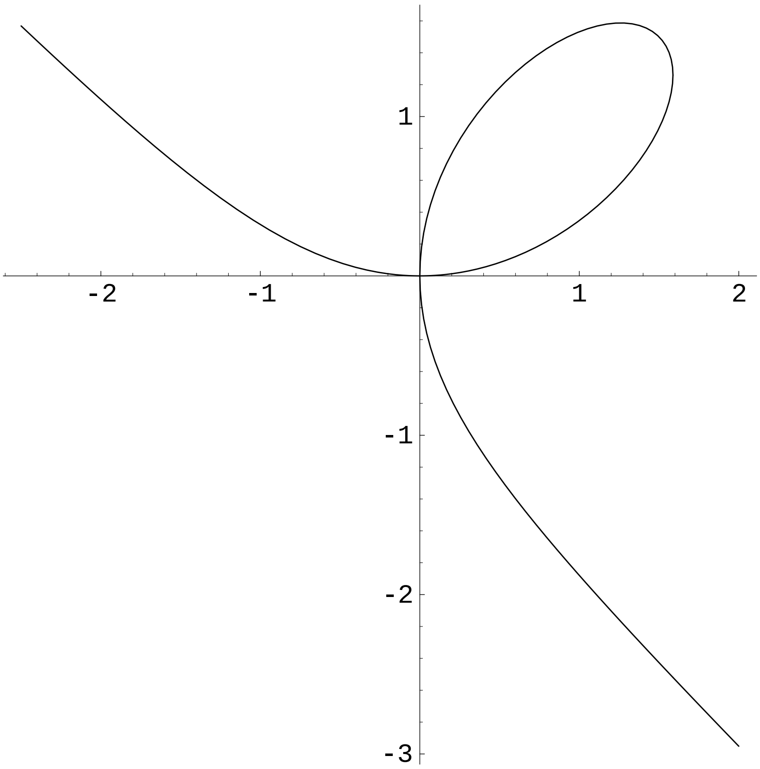


図 8: Mathematica

6.4 サイクロイド

例 6.1 (サイクロイド (cycloid) の弧長) a を正定数とするとき、曲線 $\boldsymbol{\varphi}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))^T$ $(t \in [0, 2\pi])$ の長さを求めよ。
(解) $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$ であるから、

$$\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)} = 2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

ゆえに弧長は

$$\int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.\blacksquare$$

問 サイクロイド $\Gamma: \boldsymbol{r} = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))^T$ $(t \in [0, 2\pi])$ と y 軸で囲まれる範囲の面積を求めよ[3]。(解答: $\displaystyle\int_\Gamma y\,dx = 3\pi a^2$)

[3] ガリレオはサイクロイドに興味を持って、この面積も求めようと努力し (紙を切って重さを測るとか…)、$3\pi a^2$ に近いが、厳密に等しくはない、と書いているそうです (遠山 [?] 下 pp.194–196 にもう少し詳しく書いてあります)。

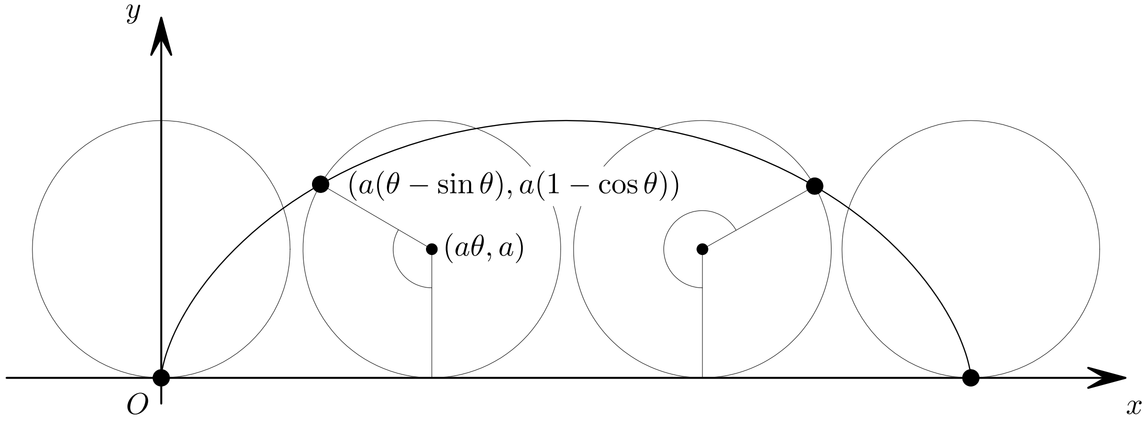


図 9: サイクロイド $(x, y) = (a(\theta - \sin\theta), a(1 - \cos\theta))$ $(\theta \in [0, 2\pi])$

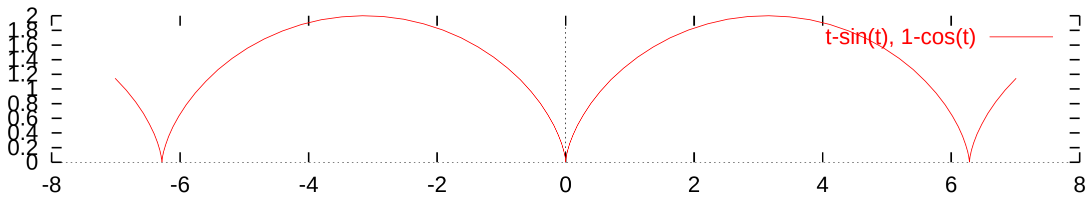


図 10: サイクロイド $(x, y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ (gnuplot による)

```
set parametric;set size ratio -1;plot [-8:8] t-sin(t),1-cos(t)
```

6.5 Cardioid

Cardioid

$$r = 1 + \cos\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

で囲まれた領域 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{2}\pi. \blacksquare$$

6.6 トロコイド

$$x = a\theta - b\sin\theta, \quad y = a - b\cos\theta$$

($a = b$ ならばサイクロイドであるが) $a < b$ のときエピ・トロコイド、$a > b$ のときハイポ・トロコイド。

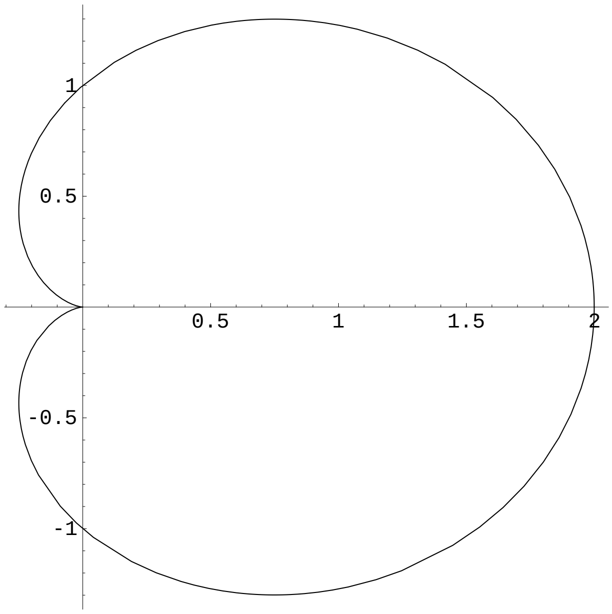


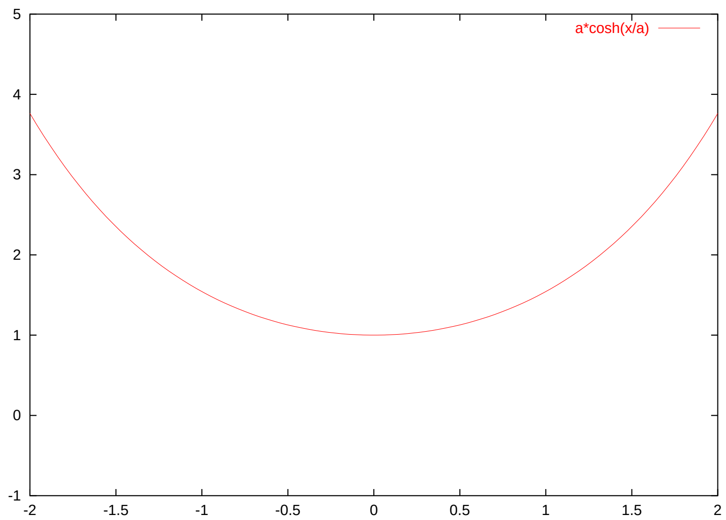
図 11: Cardioid `ParametricPlot[{(1+Cos[t])Cos[t],(1+Cos[t])Sin[t]}, {t,0,2Pi}]`

6.7 懸垂線

懸垂線 (懸垂曲線, catenary[4])

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

方程式を得たのは、ヨハン・ベルヌーイ、ライプニッツで、1691 年。



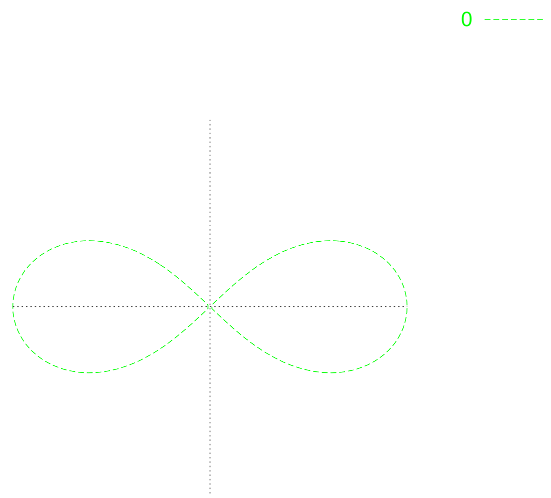
6.8 レムニスケート (lemniscate)

レムニスケート (lemniscate, 連珠形, 花輪を飾るリボンの輪)

[4]ホイヘンスにより、ラテン語の catena (チェーンの意味) に由来して命名されたとか。

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (\theta \in [-\pi/2, \pi/2])$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$



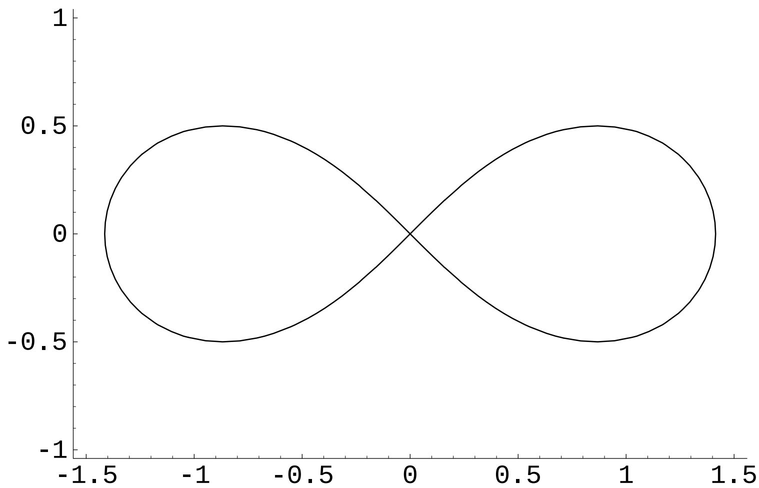


図 12: `ImplicitPlot[(x^2 + y^2) ^2 - 2(x^2 - y^2) == 0, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1, 1}]`

$a = \sqrt{2}$ の場合、2 点 $(\pm 1, 0)$ からの距離の積が 1 となる点の軌跡である。
原点からの弧長は

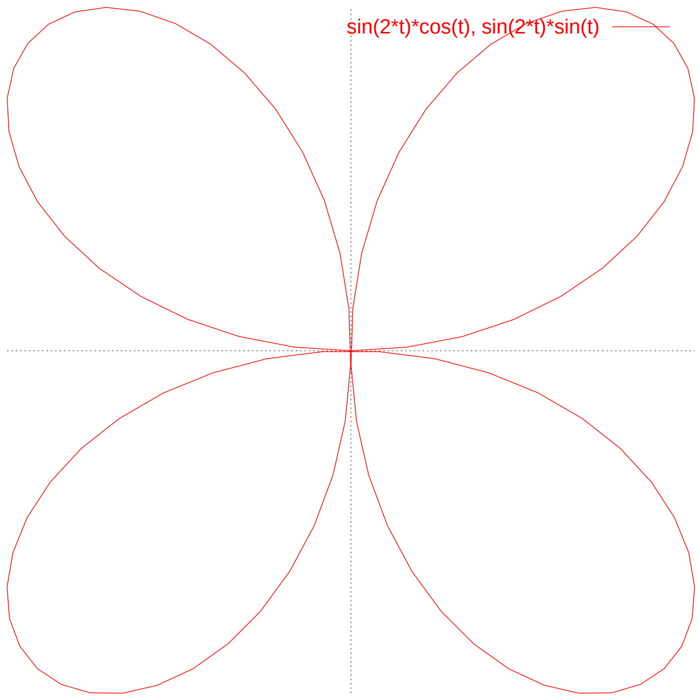
$$u = \int_0^\theta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = \sqrt{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}} = \sqrt{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \quad (x = \tan\theta).$$

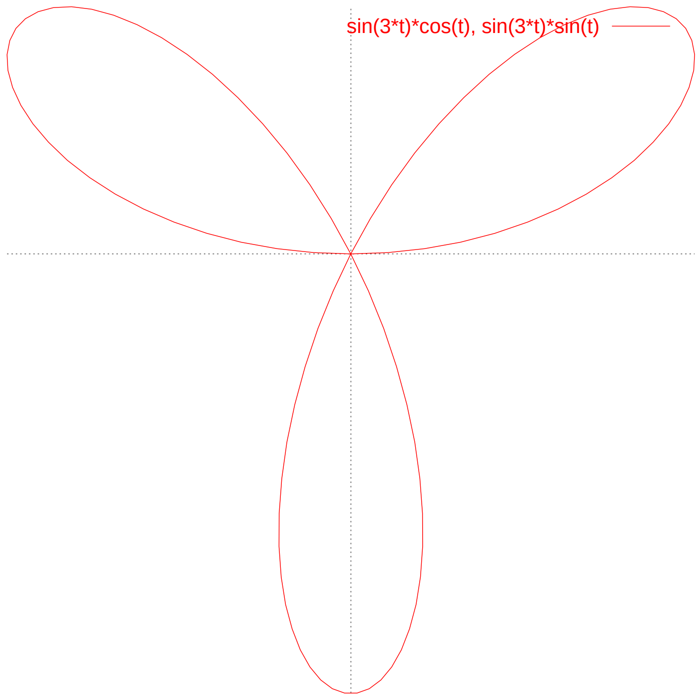
Gauss は逆関数 $x = s(u)$ を考察して、その加法定理を発見した (Gauss による楕円関数の発見)。彼はレムニスケイトの弧を 5 等分することが定規とコンパスで作図できることを見い出した。

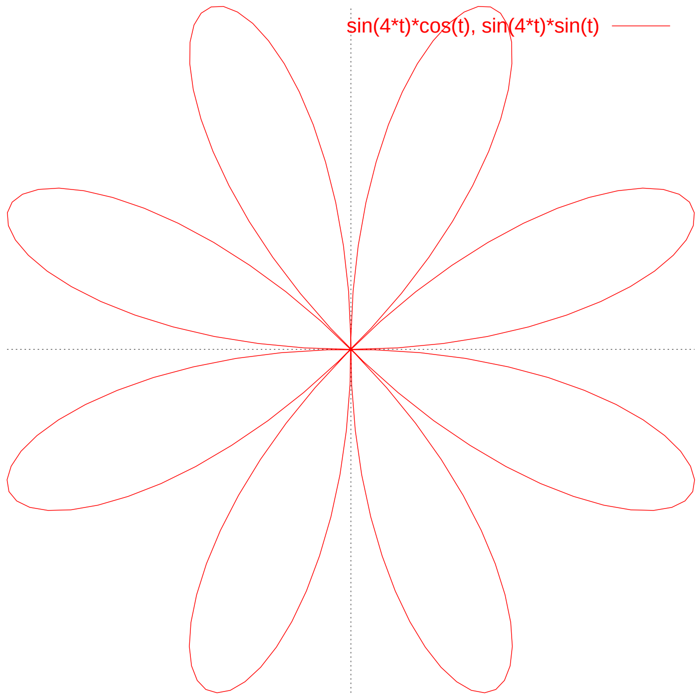
杉浦 [?], 高木 [?] を見よ。

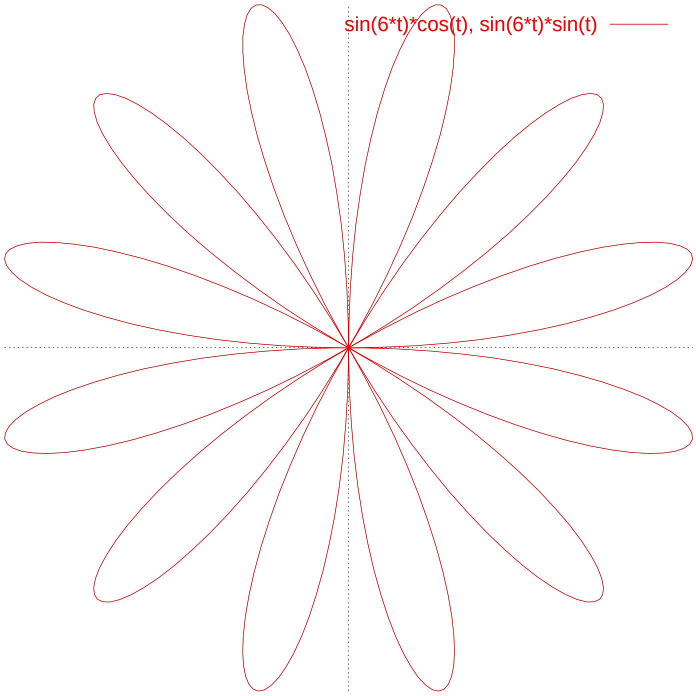
6.9 正葉線

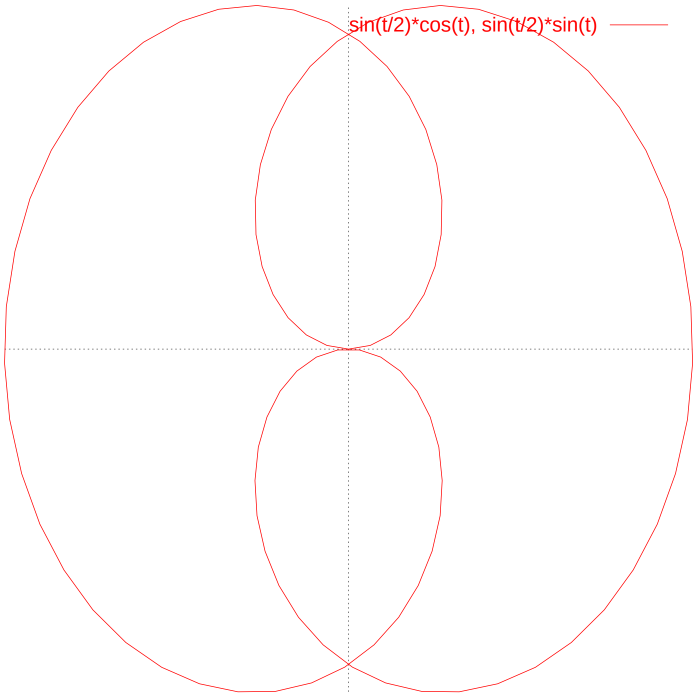
$$r = a\cos n\theta$$

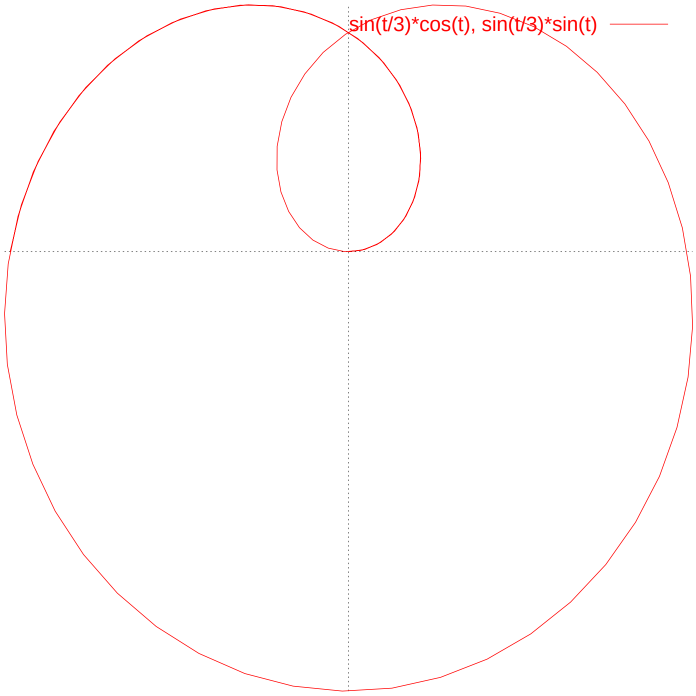



sin(3*t)*cos(t), sin(3*t)*sin(t)


sin(4*t)*cos(t), sin(4*t)*sin(t)


sin(6*t)*cos(t), sin(6*t)*sin(t)


sin(t/2)*cos(t), sin(t/2)*sin(t)

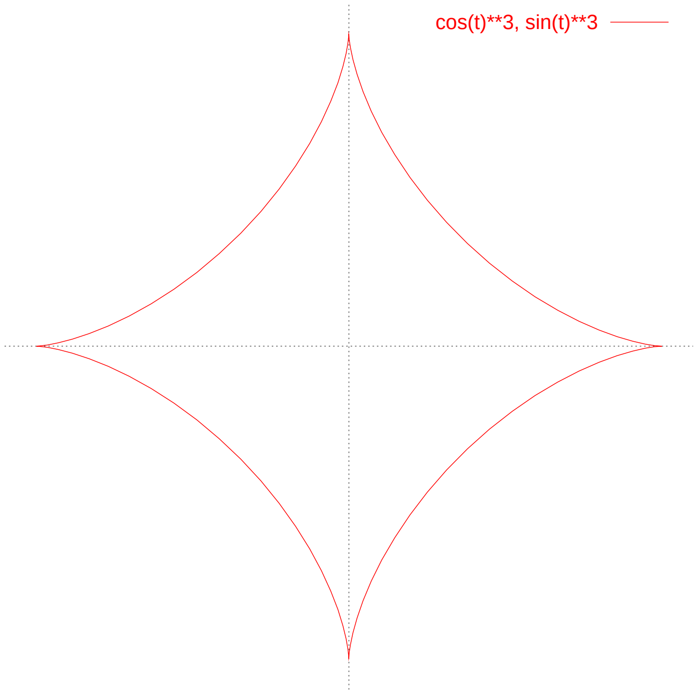


6.10　リサージュ曲線

6.11　アステロイド

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$



A　Cassini の橙形

xy 平面上で、方程式

$$(☆)\qquad \left[(x-1)^2+y^2\right]\left[(x+1)^2+y^2\right]=a^4 \quad (a \text{ は正の定数})$$

で定められる曲線を C とするとき、以下の問に答えよ。

(1) 式 (☆) を y^2 について解いて、$y^2=f(x)$ の形に表わせ。

(2) $0<a<\sqrt{2}$ であるとき、関数 $f(x)$ の増減を調べよ。

(3) $1<a<\sqrt{2}$ であるときの曲線 C の概形を描け。

(二定点からの距離の積が一定である曲線で、Cassini の橙形と呼ばれているもの。)

(1) $y^2=Y$ とおくと、(☆) は

$$Y^2+\left[(x-1)^2+(x+1)^2\right]Y+(x+1)^2(x-1)^2=a^4$$

となる。整理して、

$$Y^2+2(x^2+1)Y+(x^2-1)^2-a^4=0.$$

2 次方程式の解の公式から

$$Y=-(x^2+1)\pm\sqrt{(x^2+1)^2-[(x^2-1)^2-a^4]}=-(x^2+1)\pm\sqrt{4x^2+a^4}.$$

$Y=y^2\geq 0$ でなければならないので、複号のうち $-$ は捨てて

$$y^2=-(x^2+1)+\sqrt{4x^2+a^4}.$$

(2) $f(x) = -(x^2+1) + \sqrt{4x^2+a^4}$ とおくと、

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{\sqrt{4x^2+a^4}} = \frac{2x\left(2-\sqrt{4x^2+a^4}\right)}{\sqrt{4x^2+a^4}}.$$

ゆえに $f'(x) = 0$ となるのは、$x = 0$ または $\sqrt{4x^2+a^4} = 2$ のときである。

$$\sqrt{4x^2+a^4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2+a^4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{4-a^4}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{4-a^4}}{2}.$$

仮定 $a < \sqrt{2}$ より $4 - a^4 > 0$ であるので、$\pm\sqrt{4-a^4}/2$ は相異なる実数であることに注意する。これから関数 $f(x)$ の増減表は

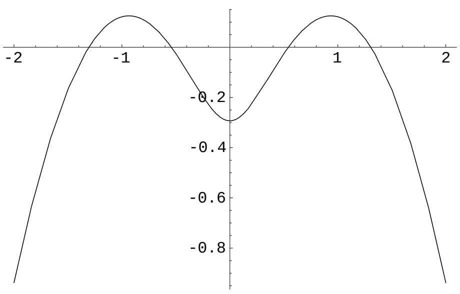
x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{4-a^4}}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		$2+a^4/4$		a^2-1		$2+a^4/4$		$-\infty$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点を調べる。

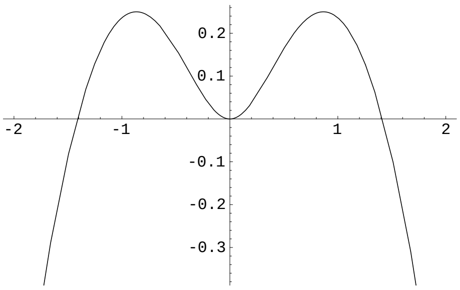
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+1 = \sqrt{4x^2+a^4} \quad \Leftrightarrow \quad x^4+2x^2+1 = 4x^2+a^4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 + (1-a^4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \pm \sqrt{1-(1-a^4)} = 1 \pm \sqrt{a^4} = 1 \pm a^2. \end{aligned}$$

これから

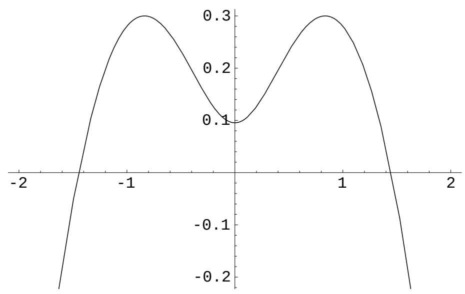
(i) $0 < a < 1$ のとき、$f(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{1+a^2}, \pm\sqrt{1-a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、$-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq -\sqrt{1-a^2}$ または $\sqrt{1-a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$.



(ii) $a = 1$ のとき、$f(x) = 0$ となるのは、$x = 0, \pm\sqrt{1+a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、$-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$.



(iii) $1 < a < \sqrt{2}$ のとき、$f(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{1+a^2}$. そして $f(x) \geq 0$ となるのは、$-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$. (参考: $a = 1.2$ の場合のグラフ)



(3) $-\sqrt{1+a^2} \leq x \leq \sqrt{1+a^2}$, $-\sqrt{2+a^4/4} \leq y \leq \sqrt{2+a^4/4}$ の範囲に存在する。y 軸との交点は $(0, \pm\sqrt{a^2-1})$.