

# 微分方程式2 第2章演習問題

桂田 祐史

katurada AT meiji.ac.jp

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/pde/>

2013年10月28日

Fourier 級数の復習をしたい人には、別に練習問題を用意しますが、配るかどうかは決めていません (WWW には置きます)。

## 1 練習問題

### 1.1 熱伝導方程式の導出

**問題 1.**  $v$  が流体の速度場 ( $v(x)$  が  $x$  における流体の速度) で、 $S$  が曲面であるとき、流束積分  $\int_S v \cdot n \, d\sigma$  ( $n$  は  $S$  の単位法線ベクトル,  $d\sigma$  は面積要素) は、単位時間に  $S$  を ( $n$  の向きに) 通過する流体の体積であることを説明せよ。(意図: ベクトル解析に良く出て来るベクトル場の法線面積分  $\int_S v \cdot n \, d\sigma$  は、 $v$  を水や空気のような流体の速度と解釈すると、鮮明な意味を持つ…ということを知っておくと良い。ぜひ知っていて欲しい。)

**問題 2.** 本文で説明したように、「比熱  $c$  と熱伝導率  $k$  は定数」という仮定から熱伝導方程式  $cu_t(x, t) = k \Delta u(x, t)$  が導かれるが、 $c$  と  $k$  が  $u$  に依存する、すなわち  $c = c(u)$ ,  $k = k(u)$  となっているとき、どのような偏微分方程式が得られるか。(出題の意図: 授業のおさらい。単におさらいするだけだとファイトが湧かない (頭が働かない) だろうから、「方程式を求める」問題にしてみた。)

**問題 3.**  $\mathbf{R}^N$  の“滑らかな”領域  $\Omega$  の境界上の点  $x$  における外向き単位法線ベクトルを  $n$  とするとき、 $C^1$  級の関数  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  に対して<sup>1</sup>、

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \text{grad } u(x) \cdot n$$

が成り立つことを説明せよ (左辺 ( $u$  の  $n$  方向の方向微分係数) の定義を復習し、それが右辺に等しいことを示せ)。

---

<sup>1</sup> $u$  が開集合とは限らない  $\bar{\Omega}$  で  $C^1$  級とは、 $\bar{\Omega}$  を含む開集合  $\tilde{\Omega}$  が存在して、 $u$  が  $\tilde{\Omega}$  で  $C^1$  級な関数に拡張できることと定義する (他の定義もあるが、ここではそれを採用する)。

「熱流束 (熱の流れの速度, 単位時間に単位面積を通過する熱量) は熱の温度勾配に比例する、ただし比例定数 (熱伝導率と呼ばれる) は負である。つまり温度を  $u$ , 熱伝導率を  $k$  とするとき 熱流束  $= -k \text{grad } u$ 」 という Fourier の熱伝導法則から、ある面をよぎって移動する熱量を計算する際に方向微分係数が必要になる。

## 1.2 Fourier 変換による解

(波動方程式の初期値問題を Fourier 変換で解いたのと同様に、熱方程式の初期値問題も Fourier 変換で解ける。熱方程式の場合は、使いやすい解の公式 (とても有名) が比較的簡単に求まる。授業では後で時間に余裕が出たら解説するが、自分でやってみよう、という人のために。)

**問題 4.**  $t$  を正定数とする。  $g(\xi) = e^{-t\xi^2}$  ( $\xi \in \mathbf{R}$ ) の逆 Fourier 変換を求めよ。

**問題 5.** 熱方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

の形式解を Fourier 変換を用いて求めよ。(ヒント: 波動方程式の初期値問題の解法を参考にすること。  $\hat{u}(\xi, t)$  を求めるのは簡単である。ここまでは自力で出来るはず。これを逆 Fourier 変換した式を簡単にするのは少し難しい。)

## 1.3 最大値原理, 正值性の保存

(今年度の授業では、最大値原理は後回しにして、先に Fourier の方法で解の公式を求める話をします。)

**問題 6.**  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は連続関数で、  $f \geq 0$  (on  $[0, 1]$ ) を満たすとするとき、初期値境界値問題

$$(1.1) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty))$$

$$(1.2) \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

の古典解  $u$  ( $u$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続、  $u_x$  は  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在し連続、  $u_t, u_{xx}$  は  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在し連続、そして  $u$  は方程式 (1.1), (1.2), (1.3) を満たす) について考える。

正定数  $\varepsilon$  を固定して  $w(x, t) := e^{-t}(u(x, t) + \varepsilon a(x, t))$ ,  $a(x, t) := 1 - x(1 - x) + 2t$  とおく。

任意の正数  $T > 0$  を固定し、  $Q_T := [0, 1] \times [0, T]$  とおき、  $Q_T$  における  $w$  の最小値を  $m = u(x_0, t_0)$  ( $(x_0, t_0) \in Q_T$ ) とする。  $m \geq 0$  を背理法で示すために、  $m < 0$  と仮定する。このとき以下の問 (i), (ii), (iii) に答えよ ((iii) までで矛盾が生じて背理法が完成する。)

- (i)  $w_t + w = w_{xx}$  (in  $(0, 1) \times (0, \infty)$ ) を確かめ、それを用いて  $(x_0, t_0) \notin (0, 1) \times (0, T]$ であることを示せ。

(ii) 任意の  $t$  に対して  $w_x(1, t) > 0$  であることを確かめ、 $x_0 \neq 1$  であることを示せ。

(iii)  $x_0 \neq 0$  であること、 $t_0 \neq 0$  であることを示せ。

(注意: この結果から古典解の一意性が分かる。また、Neumann 境界条件  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  の場合も同様に扱える。)

なお、問題 19(p. 7) でも正值性の保存を扱っている。

## 1.4 簡単な (微分作用素の) 固有値問題のドリル

**問題 7.** (次の問題のための準備) 複素数の範囲で方程式  $\exp z = -1$  を解け。

(ヒント: 本文中の  $\exp z = 1$  と同様に解いても良いし、その方程式に帰着させても良い。)

**問題 8.** (必修!) 次の固有値問題を解け (念のため: 固有値問題というとき、 $\zeta \neq 0$  である)。

(0)  $\zeta''(x) = \lambda\zeta(x) \ (x \in (0, 1)), \ \zeta(0) = \zeta(1) = 0.$

(1)  $\zeta''(x) = \lambda\zeta(x) \ (x \in (0, 1)), \ \zeta'(0) = \zeta'(1) = 0.$

(2)  $\zeta''(x) = \lambda\zeta(x) \ (x \in (0, 1)), \ \zeta(0) = \zeta'(1) = 0.$

(3)  $\zeta''(x) = \lambda\zeta(x) \ (x \in (0, 1)), \ \zeta'(0) = \zeta(1) = 0.$

(4)  $\zeta''(x) = \lambda\zeta(x) \ (x \in (-\pi, \pi)), \ \zeta(\pi) = \zeta(-\pi), \ \zeta'(\pi) = \zeta'(-\pi).$

(4) についてヒント:  $\zeta(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$  が境界条件を満たすための条件が

$$\text{(\#)} \quad \begin{pmatrix} e^{\sqrt{\lambda}} - 1 & e^{\sqrt{\lambda}} - 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} - 1 & -e^{\sqrt{\lambda}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$  となる解を持つための条件が (行列式 = 0 から得られる)  $e^{\sqrt{\lambda}} = 1$  で、このとき (\#) は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。これがどういうことか、良く考えること。

**問題 9.** 定数  $c$  に対して

$$\zeta''(x) - c\zeta'(x) + \zeta(x) = 0 \quad (x \in (0, 1)), \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0, \quad \zeta \neq 0$$

を満たす関数  $\zeta = \zeta(x)$  が存在するための条件を求めよ。

## 1.5 Fourierの方法による初期値境界値問題の解 (必修!)

問題 10. 関数  $f$  と数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  に対して、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\mathbf{R} \text{ で一様収束})$$

が成り立つとき、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

であることを示せ。

(注意: 証明のあらすじは簡単で、それをマスターすることを期待する。結果自体も非常に重要で、理解して使えるようになることが**絶対に**必要である。周期を一般にしたり、奇関数 (Fourier 正弦級数展開)、偶関数 (Fourier 余弦級数展開) の場合も同様。)

問題 11. 初期値  $f$  が次の関数の時、(H-IBP) の解を求めよ。

$$(1) f(x) = \sin \pi x \quad (2) f(x) = \sin^3 \pi x \quad (3) f(x) = x(1-x) \quad (4) f(x) = \begin{cases} x & (x \in [0, 1/2]) \\ 1-x & (x \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

ヒント  $f$  の Fourier 正弦級数展開

$$(a) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (x \in [0, 1]),$$

$$(b) \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

を求めれば、後は (H-IBP) の解の公式  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$  にあてはめるだけである。Fourier 係数  $b_n$  をその定義 (b) に基づいて計算して求めてもよいが、何らかの方法で (a) の形をした式 (ただし級数は一様収束) が得られれば、それが Fourier 級数に他ならない (問題 10 による)。積分計算をさばれる可能性がある。

(1)  $f$  は自分自身の Fourier 正弦級数展開になっている。

(2) 高校で習ったような三角関数の変形で  $f$  の Fourier 正弦級数展開が求まる。

(3) 積分を計算することで、 $f$  を Fourier 正弦級数展開する。その結果を書いておく。

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{\sin \pi x}{1^3} + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} + \cdots + \frac{\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^3} + \cdots \right).$$

(4) これも積分計算により  $f$  を Fourier 正弦級数展開する。その結果を書いておく。

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\sin \pi x}{1^2} - \frac{\sin 3\pi x}{3^2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2} + \cdots \right).$$

**問題 12.**  $\cos kx, \sin kx$  と  $\cos^k x, \sin^k x$  の相互の変換に慣れておこう。高校数学 (三角関数の倍角の公式等) でやっても良いけれど…ここで必要なのは (1) だけど、後で (2) も必要になる。

(1)

$$\cos^k x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^k, \quad \sin^k x = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^k$$

を利用 (右辺を展開) して、 $k = 2, 3, \dots, 5$  に対して、 $\cos^k x$  と  $\sin^k x$  を Fourier 級数展開せよ。

(2)

$$\cos k\theta + i \sin k\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^k$$

を利用 (右辺を展開) して、 $k = 2, 3, \dots, 5$  に対して、 $\cos k\theta$  と  $\sin k\theta$  を  $\cos \theta, \sin \theta$  で表せ。

**問題 13.** (H-IBP) の境界条件

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

を次の各条件に入れ替えた問題を解け (Fourier の方法で求めよ)。問題 8 参照。

$$(1) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(2) \quad u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(3) \quad u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(4) \quad u_x(0, t) = u(0, t), \quad u_x(1, t) = -u(1, t) \quad (t \in (0, \infty)). \quad \text{ただし簡単のため初期条件の関数 } f \text{ は } f(x) \equiv 1 \text{ とする。}$$

**ヒント** (1)~(3) は問題 8 が解けていれば (Step 1 の固有値問題が解ければ)、結果の式は簡単に求まる。

**問題 14.** (既出) 波動方程式の初期値境界値問題 (W-IBP)

$$(WE) \quad \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, 1])$$

の解を Fourier の方法で求めよ。ただし正定数  $c$  と、 $[0, 1]$  上で定義された滑らかな実数値関数  $\phi, \psi$  は与えられているとする。

## 1.6 変数変換の利用

変数変換に慣れてもらいたい。どの微分方程式でも同じことだが、この辺でやっておこう。

まず、頻出する単位の変換から。以下の問題 **15**, **16**, **18** は、いずれも直接 Fourier の方法を用いて解くことが出来るが、変数変換によって既に解決済みの問題に帰着して解くのも簡単であり、是非マスターしてほしい。

**問題 15.** 長さ  $L$  の針金の熱伝導の問題

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) && ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)), \\u(0, t) &= u(L, t) = 0 && (t \in (0, \infty)), \\u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, L])\end{aligned}$$

の解を求めよ。(ヒント:  $\xi = x/L$ ,  $u(x, t) = v(\xi, t)$  と変数変換すると、区間の長さは1になるが、微分方程式は  $v_t = \frac{1}{L^2}v_{\xi\xi}$  となつてしまい、 $1/L^2$  という因子が現れる。 $\alpha$  をうまく取つて、 $\tau = \alpha t$ ,  $w(\xi, \tau) = v(\xi, t)$  と変数変換すると、 $w_\tau = w_{\xi\xi}$  となる。)

**問題 16.** (H-IBP) の条件  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ) を  $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ) で置き換えた問題

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\u_x(0, t) &= u(1, t) = 0 && (t > 0), \\u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1])\end{aligned}$$

の解を求めよ。

(ヒント: 現象を  $1/2$  について折り返せば(具体的には、 $\xi = x - \frac{1}{2}$  と変数変換する)、問題 **13** の (2) になってしまうことに注意。)

次のような使い途も知っておくと良い。

**問題 17.** 初期値境界値問題 (H-IBP)

$$\begin{aligned}(\text{HE}) & && u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\(\text{DBC}) & && u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)), \\(\text{IC}) & && u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])\end{aligned}$$

において、 $f$  のグラフが左右対称 ( $\forall x$  に対して  $f(1-x) = f(x)$ ) であるとき、解  $u$  のグラフも左右対称であることを示せ。(ヒント:  $1/2$  について折り返す変数変換  $\xi = 1-x$ ,  $v(\xi, t) = u(x, t)$  を考える。)

熱方程式  $u_t = u_{xx}$  に「近い」問題は、変数変換で熱方程式に帰着できることがある。 $u_t = u_{xx} + qu$ ,  $u_t = u_{xx} + pu_x$ ,  $u_t = u_{xx} + pu_x + qu$  などを解いてみたい…( $u_t = u_{xx} + qu^2$  は、有名な爆発が起こったりして面白いけれど、それは非線形なのでちょっと難しい。)

**問題 18.**  $q \in \mathbf{R}$ ,  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき、次の初期値境界値問題を解け。

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + qu(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

(ヒント等: この問題も、直接 Fourier の方法を使って解けるが、変数変換  $v(x, t) = u(x, t)e^{-qt}$  (熱方程式で基本的なテクニック) を使うのも簡単なので、ここではそれを使ってみよう。この変数変換は良く使われるもので、マスターすることが望ましいが、何か感覚的な説明が必要ならば、拡散項  $u_{xx}$  を落して作った常微分方程式  $u'(t) = qu(t)$  の解が  $u(t) = u(0)e^{qt}$  であることを注意すると良いかも知れない。境界条件を  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  や  $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$  に変えるとどうなるか? またその場合の解の漸近挙動は? ナドナド、自分で色々演習問題が作れるだろう。)

**問題 19.**  $q$  を実定数とするとき、初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + qu(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && (t \in (0, 1)) \\ u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

について、正值性の保存  $f \geq 0 \implies u \geq 0$  は成り立つか? 理由をつけて答えよ。

(ヒント: 上の問題と同じ。)

**問題 20.**  $p \in \mathbf{R}$ ,  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき、次の初期値境界値問題を解け。

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + pu_x(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

(ヒント: これも直接 Fourier の方法を使っても解けなくはない。しかし得られる固有値問題は対称でないことに注意する必要がある。適当に変数変換すると、既に知っている問題に帰着できる。どういう変数変換を使うかはノーヒント (たまには自分で探してみよう)。上の問題もそうだけれど、講義ノートの本本文中に解答が書いてある。)

## 1.7 非同次の方程式

**問題 21.** (線形性、線形同次性の区別) 以下の  $u$  の方程式について、線形性、線形同次性を判別せよ。

(1)  $\frac{d^2u}{dt^2} + p\frac{du}{dt} + qu = 0$  ( $p, q$  は定数).

(2)  $u_t = \Delta u + e^u$ .

(3)  $u(0, t) = A, u(1, t) = B$  ( $A, B$  は定数).

$$(4) \quad u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t).$$

(解説: Fourier の方法の Step 2 をあっさり済ませるためには、線形同次方程式というのが何を意味するのか理解する必要がある。  $\mathcal{L}u := \begin{pmatrix} u_t - u_{xx} \\ u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \end{pmatrix}$  とおくと、 $\mathcal{L}$  は線形で、(H-IBP) の

$$(HE) \text{ と } (DBC) \text{ は } \mathcal{L}u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と書けるので、(HE) と (DBC) は線形同次方程式である。)$$

**番外の問題** 常微分方程式  $y'' - 3y' + 2y = 1 + x$  の一般解を求めよ。

(意図: 非同次方程式の特解と同次方程式の一般解があれば…というのを思い出して下さい。)

微分方程式や境界条件が同次であることは、Fourier の方法を適用するために重要な条件である。線型非同次方程式に対して、Fourier の方法を直接使うことは出来ない。非同次方程式は特解を一つでも発見できれば同次方程式に帰着できる。ここでは比較的簡単に特解が発見できる場合に練習をしてみる。

まず境界条件が非同次になった場合を扱う。空間が1次元であるから、単純な計算で特解が発見できる。

## 問題 22.

$$(HE) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

に以下の各境界条件を付け加えた初期値境界値問題の解を求めよ。ただし初期値  $f$  については、それぞれの場合に適当な条件 (例えば (1) では  $f(0) = A, f(1) = B$  とする) を課すとする。

$$(1) \quad A, B \text{ を与えられた実定数として、} u(0, t) = A, u(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(2) \quad A, B \text{ を与えられた実定数として、} u(0, t) = A, u_x(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(3) \quad A \text{ を与えられた実定数として、} u_x(0, t) = u_x(1, t) = A \quad (t \in (0, \infty)).$$

$$(4) \quad A, B \text{ を与えられた実定数として、} u_x(0, t) = A, u_x(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty)).$$

(ヒント: (1), (2), (3) は、(HE) と境界条件を満たす定常解  $v = v(x)$  が簡単に見つかる。(1) は講義で説明した (定常解の条件は  $0 = v''(x), v(0) = A, v(1) = B$ )。 (4) は定常解が存在しない。(4) の答は講義で紹介した。)

微分方程式自体が非同次である場合については、次項で取り扱うことにする。



## 1.8 Duhamel 原理再び

初めて学ぶとき、Duhamel の原理にこだわる必要はないが、分かりづらいのは確かで、そういうものは逆にとことんやってみたい、という人のために。

道具の復習

適当な仮定 (各自確認) の下で  $\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(x, y) dy = \int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dy + \varphi(x, x)$  が成り立つ。

**問題 23.**  $A \in \mathbf{R}$ ,  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  は連続とする。初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = 1$$

の解を  $x = G(t)$  とするとき、

$$x(t) := \int_0^t G(t-s)F(s) ds$$

とおくと、

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t), \quad x(0) = 0$$

が成り立つことを確かめよ。

( $G(t) = e^{tA}$  であり、 $x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}F(s) ds$  と書くのが普通かもしれない。)

**問題 24.**  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は連続とする。微分方程式の境界値問題

$$-x''(t) = F(t) \quad (t \in (0, 1)), \quad x(0) = x(1) = 0$$

の解を求めよ。

**問題 25.**  $n$  階定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

の解を  $x = G(t)$  とする。連続関数  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$u(t) := \int_0^t G(t-s)F(s) ds$$

とおくと、

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} u'(t) + a_n u(t) = F(t) & (t \in (0, \infty)), \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = u^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

が成り立つことを示せ。

**問題 26.**  $G(x, y, t) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y$  ( $x, y \in [0, 1], t > 0$ ) とおく。以下の間に答えよ。

(1) 熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の解の公式を書き、それが次式で定義される  $v_f$  と一致することを確認せよ。

$$v_f(x, t) := \begin{cases} \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy & (x \in [0, 1], t > 0) \\ f(x) & (x \in [0, 1], t = 0). \end{cases}$$

(2) (かなり難しい)  $C^1$  級の関数  $F: [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が、 $F(0, t) = F(1, t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) を満たならば、

$$u(x, t) := \int_0^t \left( \int_0^1 G(x, y, t-s) F(y, s) dy \right) ds$$

とおくとき、 $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  が成り立つことを示せ。

## 1.9 解の漸近挙動

以下の問題は、 $k$  や  $A, B$  などの定数と、初期値  $f$  で場合分けする必要がありますが、 $f$  については単純にするための仮定 (Fourier 級数展開の初項が 0 でないなど) を自分で勝手につけて解答して構いません (桂田ルール)。

線型同次方程式ではない場合、直接 Fourier の方法では解けない。特解を探してみる。

**問題 27.**  $k$  を与えられた実定数とする。初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + ku(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解の  $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。

**問題 28.**  $k$  を与えられた実定数とする。初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + ku(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u_x(1, t) = 0 && (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解の  $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。

### 問題 29. 初期値境界値問題

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) && ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\u_x(0, t) &= A, \quad u_x(1, t) = B && (t \in (0, \infty)), \\u(x, 0) &= f(x) && (x \in [0, 1])\end{aligned}$$

について以下の問に答えよ。(1)  $A = B$  の場合、 $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。(2)  $A < B$  の場合、 $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。(3) (1) と (2) の結果を物理的に解釈せよ。(ヒント: 前節の問題で解は求めている。例えば  $u_x(1, t)$  は針金の右端から針金に流れ込む熱量の速さと解釈できる。)

### 1.10 形式解が本当に解であることの確認

Fourier の方法で求めた (形式) 解が、実際に古典解であることを示す議論の理解を確認するための問題。本文中では熱方程式に対して議論したので、ここでは波動方程式でやってみる。

問題 30. 波動方程式の初期値境界値問題 (W-IBP) に対して、Fourier の方法で得た形式解

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi ct + b_n \sin n\pi ct) \sin n\pi x, \\a_n &= 2 \int_0^1 \phi(x) \sin n\pi x \, dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x \, dx\end{aligned}$$

が、以下の条件を仮定するとき、本当に解であることを確かめよ。

- (i)  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は  $C^3$  級、 $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は  $C^2$  級
- (ii)  $\phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0, \psi(0) = \psi(1) = 0$

(ヒント: 大筋は (H-IBP) の場合と同様である。 $t, x$  に対して 2 回項別微分が可能であることを示せば良く、形式的に 2 回項別微分した級数が一様収束することを示す。そのためには Weierstrass の M-test が使える。Fourier 係数の評価には、部分積分と Bessel の不等式を使う。)

### 1.11 エネルギー (総熱量) を使った議論

熱方程式  $u_t = u_{xx}$  では、物理的には  $u$  は温度で、 $J(t) := \int_0^1 u(x, t) \, dx$  は時刻  $t$  での総熱量 (エネルギー) と解釈できる。これが簡単で使い勝手の良い補助関数となる。類似物  $J(t) := \int_0^1 u(x, t)^2 \, dx$  も役に立つことがある。

**問題 31.** 初期値  $f$  については適当な仮定 (解  $u$  が積分記号下の微分が出来るくらいに良い — やや安直であるが) をおくとして、以下の各問題に答えよ。((2)~(4) については物理的に解釈すると面白い。)

(1) 初期値境界値問題

$$\begin{aligned} & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ \text{(DBC)} \quad & u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)), \\ & u(x, 0) = f(x) \quad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解  $u$  について  $J(t) := \int_0^1 u(x, t)^2 dx$  ( $t \in [0, \infty)$ ) とおくと、 $J$  は単調減少関数であることを示せ。 $f \equiv 0$  ならば  $u \equiv 0$  であることを示せ。

(2) 初期値境界値問題

$$\begin{aligned} & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ \text{(NBC)} \quad & u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)), \\ & u(x, 0) = f(x) \quad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解  $u$  について  $J(t) := \int_0^1 u(x, t) dx$  ( $t \in [0, \infty)$ ) とおくと、 $J$  は定数関数であることを示せ。

(3)  $A, B$  を与えられた実定数とする。初期値境界値問題

$$\begin{aligned} & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ \text{(INBC)} \quad & u_x(0, t) = A, \quad u_x(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty)), \\ & u(x, 0) = f(x) \quad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解  $u$  について  $J(t) := \int_0^1 u(x, t) dx$  ( $t \in [0, \infty)$ ) とおくと、 $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$  を求めよ。

(4)  $k$  を与えられた実定数とする。初期値境界値問題

$$\begin{aligned} & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + ku(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ \text{(PBC)} \quad & u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad (t \in (0, \infty)), \\ & u(x, 0) = f(x) \quad (t \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解  $u$  について  $J(t) := \int_0^1 u(x, t) dx$  ( $t \in [0, \infty)$ ) とおくと、 $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t)$  を求めよ。