微分方程式2演習問題 (1)

桂田 祐史

2013年9月23日

演習問題の解説はそのうち公開します (僕が忘れていたら催促して下さい)。最初はノーヒントで考えてみて下さい。

1 補足: 微積分の問題

問題 1. 次の命題 (割と有名) を証明せよ。「$f\colon I=(a,b)\to\mathbf{R}$ が連続で、$c\in I$, f は (a,c) と (c,b) の両方で微分可能、さらに

$$\exists A\in\mathbf{R}\quad \text{s.t.}\quad A=\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}} f'(x)$$

が成り立つならば、f は c で微分可能で $f'(c)=A$ である。さらに f が (a,c) と (c,b) の両方で C^1 級ならば、実は f は I で C^1 級である。」

問題 2. 次の命題を完成させ (適当な仮定を補う必要がある)、(c), (d), (e) を証明せよ ((a), (b) は良く知られている結果である)。

補題 1.1 (a) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$

(b) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy=f(x).$

(c) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy=f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)-f\left(\psi(x)\right)\psi'(x).$

(d) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x g(x,y)\,dy=\int_a^x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dy+g(x,x).$

(e) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} g(x,y)\,dy=g(x,\varphi(x))\varphi'(x)-g(x,\psi(x))\psi'(x)+\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy.$

問題 3. $f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続であるとき、任意の $x\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r^n\omega_n}\int_{|y-x|\le r} f(y)\,dy=f(x)$$

であることを示せ。ただし、ω_n は $\mathbf{R}^n$ の単位球の測度である:

$$\omega_n:=\int_{B_1}dz,\quad B_1:=\{z\in\mathbf{R}^n;|z|\le1\}.$$

(「平均の極限は密度である」ということ。ヒント: $\displaystyle \frac{1}{r^n\omega_n}\int_{|y-x|\le r}dy=1$)

確認事項: 奇関数と偶関数　$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ について、f が奇関数であるとは

$$f(-x) = -f(x) \quad (x\in\mathbf{R})$$

が成り立つことをいい、f が偶関数であるとは

$$f(-x) = f(x) \quad (x\in\mathbf{R})$$

が成り立つことをいう …… 関数 $f(x)=x^k$ (k は自然数) の指数 k の偶奇から来ているのだと想像する。

奇関数 $\times$ 奇関数 $=$ 偶関数, 奇関数 $\times$ 偶関数 $=$ 奇関数, 偶関数 $\times$ 偶関数 $=$ 偶関数 が成り立つことは容易に確認できる。

問題 4.　$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は奇函数, $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は偶関数で、ともに十分な回数微分可能とするとき、以下のことを示せ。

(1) $\forall a\in\mathbf{R}$ に対して、$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$ である。

(2) f' は偶関数、g' は奇関数である。

(3) 任意の $k=0,1,2,\dots$ に対して、$f^{(2k)}(0)=0$, $g^{(2k+1)}(0)=0$ である。(ゆえに、Taylor 展開が可能な場合、f の Taylor 展開は奇数次の項だけからなり、g の Taylor 展開は偶数次の項だけからなる。)

問題 5.　$f\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ は C^2 級とするとき、

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x\ge 0), \\ -f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

とおく。(自由に描いた f のグラフに対して、F のグラフを描け。) 以下のことを示せ。

(1) F が連続であるためには、$f(0)=0$ であることが必要十分である。

(2) $f(0)=0$ が成り立つとき、F は C^1 級である。

(3) $f(0)=0$ が成り立つとき、F が C^2 級であるためには、$f''(0)=0$ であることが必要十分である。

(**注意**　$f(0)=0$ のとき、F は奇関数である。F のことを f の奇関数拡張と呼ぶ。)

問題 6.　上の問題の偶関数拡張バージョンに解答せよ。

2　練習問題

ほとんどは微積分 (特に合成関数の微分法, 積分記号下の微分) の問題である。

問題 1.　$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が C^2 級の関数, c が定数であるとき、

$$u(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct)$$

によって $u\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を定めると、u は 1 次元波動方程式

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

を満たすことを示せ。

問題 2.　$u(x,t)=f(x-ct)$ (c は実定数, f は C^2 級の関数で $f''\not\equiv 0$) が 1 次元波動方程式

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)$$

の解ならば $|c|=1$ であることを示せ。またこのとき、$u(x,0)$, $u_t(x,0)$ を求めよ。(**余談**: 右側に進行する波を初期値問題の解として実現するには、初期値をどう取れば良いか、ということで、数値シミュレーション・プログラムのチェックに有用である。簡単なのだが、コンピューターの前に座ると「分からなくなってしまう」人が多い。)

問題 3.　(**平面波, plane wave**) ν を $|\nu|=1$ なる $\mathbf{R}^n$ の元、c を正定数、$U\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を C^2 級の関数とするとき、

$$u(x,t)=U(\nu\cdot x-ct)\quad (x\in\mathbf{R}^n,\ t\in\mathbf{R})$$

で定義される $u\colon \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は、$u_{tt}(x,t)=c^2\triangle u(x,t)$ を満たすことを示せ。ただし $\nu\cdot x$ は ν と x の内積を表すものとする。

問題 4.　正定数 c と、C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}\ni(x,t)\mapsto u(x,t)\in\mathbf{R}$ があるとき、

$$\xi=x-ct,\quad \eta=x+ct$$

で新しい変数 (ξ,η) を導入して、$v(\xi,\eta)=u(x,t)$ とおくとき、

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=-4v_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

が成り立つことを示せ。

問題 5.　$f\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto f(x,y)\in\mathbf{R}$ が C^1 級とするとき、次の (1), (2) を示せ。

(1) $f_x(x,y)\equiv 0$ であれば、$\exists g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ s.t. $f(x,y)=g(y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ が成り立つ。

(2) $f_x(x,y)\equiv F'(x)$, $F\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ であれば、$\exists g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ s.t. $f(x,y)=F(x)+g(y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ が成り立つ。

問題 6.　Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域、$f\in C^1(\Omega)$, $f_x\equiv 0$ (Ω 内) とするとき、$f(x,y)=g(y)$ $((x,y)\in\Omega)$ を満たす関数 g は必ず存在すると結論して良いか？ (成立するならば証明し、そうでなければ反例を与えよ。)

問題 7.　$\phi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\psi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が与えられたとき 1 次元波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) && ((x,t)\in\mathbf{R}^2)\\ &u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) && (x\in\mathbf{R}) \end{aligned}$$

の解は d'Alembert の波動公式

$$(\sharp)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2}(\phi(x-ct)+\phi(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy$$

で与えられることを示せ。(これまで出て来た問の結果を利用してよい。)

問題 8. $\phi \in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$, $\psi \in C^1(\mathbf{R};\mathbf{R})$ とするとき、

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy \quad ((x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R})$$

で定めた u が

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t) \quad \text{in } \mathbf{R}\times\mathbf{R}, \quad u(x,0)=\phi(x) \quad (x\in\mathbf{R}), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \quad (x\in\mathbf{R})$$

を満すことを直接計算で示せ。

問題 9. 1 次元波動方程式について、Duhamel の原理の「問題 1 の解から問題 2 の解を作る」が成り立つことを、d'Alembert の波動公式を用いて証明するため、以下の問に答えよ。

(1) $\frac{1}{c^2}v_{tt}(x,t)=v_{xx}(x,t)$ (in $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$), $v(x,0)=0$ ($x\in\mathbf{R}$), $v_t(x,0)=\phi(x)$ ($x\in\mathbf{R}$) の解 v を用いて $w:=v_t$ とおくとき、w を ϕ を用いて表せ。

(2) w が $\frac{1}{c^2}w_{tt}(x,t)=w_{xx}(x,t)$ (in $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$), $w(x,0)=\phi(x)$ ($x\in\mathbf{R}$), $w_t(x,0)=0$ ($x\in\mathbf{R}$) の解であることを示せ。

Duhamel の公式 (の一部)

($\phi=0$ とした初期値問題)

$$\frac{1}{c^2}v_{tt}(x,t)=v_{xx}(x,t) \quad ((x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}),$$
$$v(x,0)=0, \quad v_t(x,0)=\psi(x) \quad (x\in\mathbf{R})$$

の解 v を v_ψ で表すとき、

($\flat$)
$$U(x,t) := \int_0^t v_{F(\cdot,s)}(x,t-s)ds$$

は

$$U_{tt}=c^2U_{xx}+F(x,t), \quad U(x,0)=U_t(x,0)=0$$

の解である。

問題 10. 正定数 c と連続な $F\colon \mathbf{R}\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t)=c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)+F(x,t) && (x\in\mathbf{R},\ t>0),\\
&U(x,0)=0 && (x\in\mathbf{R}),\\
&\frac{\partial U}{\partial t}(x,0)=0 && (x\in\mathbf{R})
\end{aligned}$$

を満たす $U=U(x,t)$ を求める初期値境界値問題について、以下の問に答えよ。

(1) d'Alembert の波動公式 ($\sharp$) (p. 3) を Duhamel の原理 ($\flat$) に代入した

($\natural$)
$$U(x,t) := \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}F(y,s)\,dyds$$

の U に対して、直接

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t),\quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t),\quad \frac{\partial U}{\partial x}(x,t),\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$$

を計算し、U が解であることを確めよ。

(2) 初期値境界値問題の解 U が存在したと仮定し、$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, $V(\xi,\eta) := U\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$ と変数変換する。

(a) V は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right) && ((\xi,\eta)\in\Omega),\\
&V(\xi,\xi) = 0 && (\xi\in\mathbf{R}),\\
&\frac{\partial V}{\partial\xi}(\xi,\xi) = \frac{\partial V}{\partial\eta}(\xi,\xi) && (\xi\in\mathbf{R})
\end{aligned}$$

を満たすことを示せ。ただし $\Omega := \{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2; \xi > \eta\}$.

(b) 任意の $(\xi_0,\eta_0)\in\Omega$ に対して、

$$\begin{cases}
V(\xi_0,\eta_0) = V(\eta_0,\eta_0) + \displaystyle\int_{\eta_0}^{\xi_0} \frac{\partial V}{\partial\xi}(\xi,\eta_0)\,d\xi,\\
\dfrac{\partial V}{\partial\xi}(\xi,\eta_0) = \dfrac{\partial V}{\partial\xi}(\xi,\xi) + \displaystyle\int_{\xi}^{\eta_0} \frac{\partial^2 V}{\partial\eta\partial\xi}(\xi,\eta)\,d\eta
\end{cases}$$

が成り立つことを利用して

$$(\star)\qquad V(\xi_0,\eta_0) = -\int_{\eta_0}^{\xi_0}\left(\int_{\eta_0}^{\xi} g(\xi,\eta)\,d\eta\right)d\xi,\quad g(\xi,\eta) := -\frac{1}{4c^2}F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

を示せ。

(c) 積分 ($\star$) を変数変換することによって U を求め (つまり F で表す)、(1) の結果 (式 ($\natural$)) と一致することを確めよ。

問題 11. 半直線 $I = [0,\infty)$ 上の波動方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned}
&\text{(WE)} && \frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) && (x\in(0,\infty),\ t\in(0,\infty)),\\
&\text{(NBC)} && u_x(0,t) = 0 && (t\in(0,\infty)),\\
&\text{(IC)} && u(x,0) = \phi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x) && (x\in I)
\end{aligned}$$

を考える。ここで c は与えられた正定数、$\phi\in C^2(I;\mathbf{R})$ と $\psi\in C^1(I;\mathbf{R})$ は $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ を満たす与えられた関数とする。

(1) $\Phi(x) := \begin{cases}\phi(x) & (x\ge 0)\\ \phi(-x) & (x<0)\end{cases}$, $\Psi(x) := \begin{cases}\psi(x) & (x\ge 0)\\ \psi(-x) & (x<0)\end{cases}$ で Φ, Ψ を定めるとき、$\Phi\in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$, $\Psi\in C^1(\mathbf{R};\mathbf{R})$ であることを示せ。

(2) 初期値境界値問題 (WE), (NBC), (IC) の解を求めよ。初期値問題の解の公式 (ダランベールの公式) は既知として用いてよい。

(3) (NBC) の代りに Dirichlet 境界条件

$$\text{(DBC)}\qquad u(0,t) = 0\quad (t>0)$$

を課した初期値境界値問題の解の公式を求めよ。ただし初期条件 ϕ, ψ に関する条件は適当に修正すること。

問題 12.　3 次元波動方程式

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,y,z,t) = u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t) + u_{zz}(x,y,z,t)$$

の解 $u = u(x,y,z,t)$ で、適当な関数 w を用いて

$$u(x,y,z,t) = w(r,t), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

の形に書けるものを**球面波** (**spherical wave**) と呼ぶ。球面波は実は

$$u(x,y,z,t) = \frac{h_1(r-ct)}{r} + \frac{h_2(r+ct)}{r}$$

の形をしている (h_1, h_2 は適当な 1 変数関数) ことを示せ。また n 次元の球面波はどうなるか。

問題 13.　(Fourier の方法を学んでから取り組むこと) $[0,1]$ 上定義され、$f(0) = f(1) = 0$ を満たす滑らかな関数 f と、$c \in \mathbf{R}$ が与えられたときに、波動方程式の初期値境界値問題

(1)　$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad ((x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)),$$

(2)　$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (t \in (0,\infty)),$$

(3)　$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad (x \in [0,1])$$

を Fourier の方法で解け (実際に解であることは証明しなくて良い)。境界条件 (2) を Neumann 境界条件 $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ $(t \in (0,\infty))$ に変えるとどうなるか。

問題 14.　$\mathbf{R}^n$ の有界領域 Ω における波動方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) = \triangle u(x,t) && ((x,t) \in \Omega \times \mathbf{R})\\
&u(x,t) = 0 && ((x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R})\\
&u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) && (x \in \overline{\Omega})
\end{aligned}$$

の解が $\widetilde{\Omega} \times \mathbf{R}$ で C^2 級であるとするとき (ただし $\widetilde{\Omega}$ は $\overline{\Omega}$ を含むある開集合)、

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_t(x,t)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)^2\right] dx \quad (t \in \mathbf{R})$$

は t によらない定数であることを示せ。

普通の意味での練習問題はここまで。以下は後始末的なもの、研究課題である。

問題 15.　$(a_1,a_2,a_3) \in \mathbf{R}^3$, $r > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
S &:= \left\{(x_1,x_2,x_3); (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2 = r^2\right\},\\
D &:= \left\{(x_1,x_2); (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \le r^2\right\}
\end{aligned}$$

とおくと、D 上の連続関数 $f\colon D \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\int_S \widetilde{f}\, d\sigma = 2r \iint_D \frac{f(x_1,x_2)}{\sqrt{r^2-(x_1-a_1)^2-(x_2-a_2)^2}} dx_1 dx_2.$$

が成り立つことを示せ。ただし $\widetilde{f}(x_1,x_2,x_3) := f(x_1,x_2)$ $((x_1,x_2,x_3) \in S)$ とおいた。(Poisson の波動公式を導出する議論の後始末。面積分を重積分で表せ、ということ。)

問題 16.　2次元、3次元の Laplacian を極座標で表す以下の公式を導け。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).$$

(2次元の場合は自力で出来るようになって欲しい。3次元の場合を工夫なしにやるとかなり面倒になる。)

問題 17.　Kirchhoff, Poisson の波動公式の一般次元バージョンを求めよ。(書いてある本を探し出して解読し、まとめ直す、という作業になるであろう。卒業研究レベル。もし出来たら、レポートとして提出してみよう。)