微分方程式 2 レポート課題 1

桂田 祐史

2013 年 10 月 21 日, 2014 年 1 月 1 日訂正

締切は 11 月 18 日 (月) 授業開始時。A4 レポート用紙を用いること。学生同士で相談しても、教員に質問しても構わない (むしろ推奨する) が、最後は自力でレポートを書くこと。添削の上で返却するが、授業最終回までにそれを受け取ることが必要条件 (提出のみは減点する)。

記号: $F \in C^k(I;J)$ は $F\colon I \to J$ で、F が I で C^k 級であることを意味する。

課題 1　$c > 0$, $I = (0,\infty)$, $\phi \in C^2(\overline{I};\mathbf{R})$, $\psi \in C^1(\overline{I};\mathbf{R})$ とするとき、I における波動方程式の初期値境界値問題

(WE) $$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in I \times (0,\infty)),$$

(DBC) $$u(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$$

(IC) $$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{I})$$

を考える。ただし簡単のため ϕ と ψ は 0 のある近傍で 0, すなわち

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0,\varepsilon] \quad \phi(x) = \psi(x) = 0$$

とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) $f, g \in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ に対して、

$$u(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct) - g(-(x-ct)) \quad (x \in \mathbf{R},\ t \in [0,\infty))$$

とおくとき、u は

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty)),$$
$$u(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty))$$

を満たすことを示せ。また $x \geq 0$ に対して、$u(x,0)$, $u_t(x,0)$ を f と g で表せ。ただし

$$\forall x \leq 0 \quad f(x) = g(x) = 0$$

と仮定する。

(2) (1) の f と g をうまく選ぶことによって、初期値境界値問題 (WE), (DBC), (IC) の解を求めよ。

ヒント: d'Alembert の解の公式の導出を参考にせよ。結果は次のようになるはず:

$$(*)\qquad u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right)+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy & (x-ct\geq 0\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right)+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(y)\,dy & (x-ct<0\text{ のとき}).\end{cases}$$

(3) $(*)$ で u を定めるとき、u が (W-IBP) の解であることを計算で確認せよ (いわゆる検算です)。

訂正　配布したプリントには、(W-IBP) の定義を書かないという間抜けなことをしてしまいました。大抵の人は出題者の意図を汲んでくれましたが、混乱した人もいたようです。すみません。方程式 (WE), (DBC), (IC) から初期値境界値問題のことです。

2014 年 1 月 1 日

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= f'(x-ct)(-c) + g'(x+ct)\cdot c - g'(-x+ct)\cdot c,\\
u_{tt}(x,t) &= f''(x-ct)(-c)^2 + g''(x+ct)\cdot c^2 - g''(-x+ct)\cdot c^2\\
&= c^2(f''(x-ct) + g''(x+ct) - g''(-x+ct)),\\
u_x(x,t) &= f'(x-ct) + g'(x+ct) - g'(-x+ct)\cdot(-1),\\
u_{xx}(x,t) &= f''(x-ct) + g''(x+ct) - g''(-x+ct)\cdot(-1)^2\\
&= f''(x-ct) + g''(x+ct) - g''(-x+ct)
\end{aligned}
$$

であるから、$\dfrac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ が成り立つ。また

$$u(0,t) = f(0-ct) + g(0+ct) - g(-0+ct) = f(-ct) + g(ct) - g(ct) = f(-ct)$$

において、$t > 0$ ならば $-ct < 0$ であるから $f(-ct) = 0$. ゆえに

$$u(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)).$$

以下、$x \geq 0$ とする。$-x \leq 0$ であるから、仮定より $g(-x) = g'(-x) = 0$ となるので、

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = f(x) + g(x) - g(-x) = f(x) + g(x),\\
&u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) - cg'(-x) = -cf'(x) + cg'(x).
\end{aligned}
$$

(2) (1) の u は、(WE) と (DBC) を満たしているので、f と g をうまく取って、初期条件 (IC) を満たすように出来れば良い。u を (IC) に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\phi(x) = u(x,0) = f(x) + g(x),\\
&\psi(x) = u_t(x,0) = -cf'(x) + cg'(x) \quad (x \in [0,\infty)).
\end{aligned}
$$

これは初期値問題の場合と式の形は同じである (初期値問題の場合は $x \in \mathbf{R}$ で、こちらは $x \in [0,\infty)$ と、成り立つ範囲は異なっているが)。これから、(初期値問題を解いた時と同様にして)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\phi(x) - \frac{1}{c}\int_0^x \psi(y)\,dy + f(0) - g(0)\right),\\
g(x) &= \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \frac{1}{c}\int_0^x \psi(y)\,dy - f(0) + g(0)\right)
\end{aligned}
$$

と f, g が求まる (ここで $f(0) = g(0) = 0$ を代入して簡単化しても良い)。これを

$$u(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct) - g(-(x-ct)) \quad (x \in \mathbf{R},\ t \in [0,\infty))$$

に代入すれば、解が求まるわけである。$x \geq 0$ に対して、t が小さく $x-ct \geq 0$ のうちは、$-x+ct \leq 0$ で、$g(-x+ct)=0$ であるから、

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-ct)+g(x+ct) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\phi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_0^{x-ct}\psi(y)\,dy+f(0)-g(0) \\
&\qquad +\phi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy-f(0)+g(0)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

一方 t が大きく、$x-ct<0$ となったら、$-x+ct>0$ で、$f(x-ct)=0$ であるから、

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= g(x+ct)-g(-x+ct) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\phi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy-f(0)+g(0) \\
&\qquad -\phi(-x+ct)-\frac{1}{c}\int_0^{-x+ct}\psi(y)\,dy+f(0)-g(0)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

まとめると $(x,t)\in\overline{I}\times[0,\infty)$ に対して、

$$u(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy & (x-ct\geq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(y)\,dy & (x-ct<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば、u は (WE), (DBC), (IC) を満たす。この結果は、講義ノート問題 **11** (3) にある通りである (その問題とは解き方が異なるが)。

(3) まず波動方程式 (WE) を満たすことを確認する。ψ の原始関数を Ψ と書くことにする。$x-ct\geq 0$ のとき、

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(\Psi(x+ct)-\Psi(x-ct)\right)$$

となるので

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\phi'(x+ct)+\phi'(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(\Psi'(x+ct)-\Psi'(x-ct)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\phi'(x+ct)+\phi'(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi(x+ct)-\psi(x-ct)\right),
\end{aligned}$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi'(x+ct)-\psi'(x-ct)\right),$$

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{c}{2}\left(\phi'(x+ct)-\phi'(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(c\cdot\Psi'(x+ct)-(-c)\Psi'(x-ct)\right) \\
&= \frac{c}{2}\left(\phi'(x+ct)-\phi'(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x+ct)+\psi(x-ct)\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{c^2}{2}\left(\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(c\cdot\psi'(x+ct)+(-c)\psi'(x-ct)\right)\\
&= \frac{c^2}{2}\left(\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct)\right)+\frac{c}{2}\left(\psi'(x+ct)-\psi'(x-ct)\right).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi''(x+ct)+\phi''(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi'(x+ct)-\psi'(x-ct)\right)=u_{xx}(x,t).
$$

$x-ct<0$ のとき、

$$
u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right)+\frac{1}{2}\left(\Psi(x+ct)-\Psi(ct-x)\right)
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\phi'(x+ct)+\phi'(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(\Psi'(x+ct)-(-1)\Psi'(ct-x)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\phi'(x+ct)+\phi'(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi(x+ct)+\psi(ct-x)\right),\\
u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\phi''(x+ct)-\phi''(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi'(x+ct)-\psi'(ct-x)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{c}{2}\left(\phi'(x+ct)-\phi'(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(c\cdot\Psi'(x+ct)-c\cdot\Psi'(ct-x)\right)\\
&= \frac{c}{2}\left(\phi'(x+ct)-\phi'(ct-x)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x+ct)-\psi(ct-x)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{c^2}{2}\left(\phi''(x+ct)-\phi''(ct-x)\right)+\frac{1}{2}\left(c\cdot\psi'(x+ct)-c\cdot\psi'(ct-x)\right)\\
&= \frac{c^2}{2}\left(\phi''(x+ct)-\phi''(ct-x)\right)+\frac{c}{2}\left(\psi'(x+ct)-\psi'(ct-x)\right).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\phi''(x+ct)-\phi''(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\left(\psi'(ct+x)-\psi'(ct-x)\right)=u_{xx}(x,t).
$$

次に境界条件 (DBC) の確認をする。$x=0$ のとき、$t>0$ に対して $x-ct<0$ であることに注意して

$$
u(0,t)=\frac{1}{2}\left(\phi(ct)-\phi(ct)\right)+\frac{1}{2}\int_{ct}^{ct}\psi(t)\,dy=0.
$$

次に初期条件 (IC) の確認をする。$x\geq 0$ のとき、$t=0$ に対して $x-ct\geq 0$ であることに注意して

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2}\left(\phi(x)+\phi(x)\right)+\frac{1}{2}\int_{x}^{x}\psi(y)\,dy=\phi(x),\\
u_t(x,0) &= \frac{x}{2}\left(\phi'(x)-\phi'(x)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x)+\psi(x)\right)=\psi(x).\blacksquare
\end{aligned}
$$

(3) については、次のことに注意しよう。

- (WE) は $x-ct\geq 0$, $x-ct<0$ どちらの場合も考える必要がある。
- (DBC) は $x=0$, $t>0$ であるから、$x-ct<0$ の場合のみ考えれば良い。
- (IC) は $x\geq 0$, $t=0$ であるから、$x-ct\geq 0$ の場合のみ考えれば良い。