

応用数値解析特論 第7回

～発展系の数値解析 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2024/>

2024年6月4日

目次

1 本日の内容

2 発展系の有限要素解析

- 準備 — 1次元熱方程式の初期値境界値問題に対する差分法
 - 格子点
 - 差分近似の公式
 - 熱方程式に対する差分方程式の導出
 - 境界条件に対する差分方程式
 - 差分方程式の行列・ベクトル表記
 - 差分スキームの安定性 (あらっばい説明)
 - 大まかなまとめ
 - 熱方程式の初期値境界値問題 (Dirichlet 境界条件) の差分法プログラム
- 熱方程式に対する有限要素法
 - 例題
 - 解法の方針
 - 熱方程式に対する前進 Euler 法
 - 熱方程式に対する後退 Euler 法
 - 熱方程式に対する θ 法
 - 実習課題
 - その他

3 参考文献

- FreeFem++ についての相談は気軽にどうぞ。
(zsh を使っているはずなのに、bash についての警告が出る、という人がいましたが、後で申し出て下さい。)
- 発展系の有限要素解析を説明するため、まず熱方程式に対する差分法を駆け足で解説する。
- それから、有限要素法で解く話になる。サンプル・プログラムを提示して解説する。あまり深い話はしない。
- このスライドの最後に実習課題と書いてあるけれど、次回やります。

8 発展系の有限要素解析

8.1 準備 — 1次元熱方程式の初期値境界値問題に対する差分法

時間の経過に伴い変化する系 (発展系) のシミュレーションを考える。

要点は、空間方向は有限要素近似し、時間方向は差分近似する、というもの。

そのため、差分法について大急ぎで説明する。

差分法について、より詳しい解説は、例えば桂田 [1], [2] の第1章を見よ。

次の熱方程式の初期値境界値を例題として取り上げる。

$$(1a) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(1b) \quad u(0, t) = \alpha \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(1c) \quad u_x(1, t) = \beta \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(1d) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

8.1.1 格子点

未知関数 u の定義域 $[0, 1] \times [0, \infty)$ を “格子” に分割する。

具体的には、 $N \in \mathbb{N}$, $\Delta t > 0$ として、

$$\Delta x := \frac{1}{N}, \quad x_i = i\Delta x \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

$$t_n = n\Delta t \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$u_i^n = u(x_i, t_n)$$

とおく。

Δt , Δx を**刻み幅** (stepsize), (x_i, t_n) を**格子点**と呼ぶ。

u は連続変数 x , t の関数であるが、それを求めることはあきらめて、格子点での関数値 u_i^n の近似値を求めることを目標にする。

8.1.2 差分近似の公式

f が C^2 級するとき (2a) と (2b) が、 f が C^3 級するとき (2c) が、 f が C^4 級するとき (2d) が成り立つ。

$$(2a) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

$$(2b) \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

$$(2c) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0),$$

$$(2d) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

右辺の第1項をそれぞれ、前進差分商、後退差分商、1階中心差分商、2階中心差分商と呼ぶ。

左辺の導関数を右辺の第1項で近似することを、それぞれ前進差分近似、後退差分近似、1階中心差分近似、2階中心差分近似と呼ぶ。

8.1.3 熱方程式に対する差分方程式の導出

前のスライドに述べたことから

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\Delta t \rightarrow 0),$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\Delta t \rightarrow 0),$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

$u_t = u_{xx}$ が成り立つので、

$$(6a) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2),$$

$$(6b) \quad \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t + \Delta x^2).$$

この2つの式を参考に、次のスライドで差分方程式を立てる。

8.1.3 熱方程式に対する差分方程式の導出

a) 前進 Euler 法

$$(7) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}.$$

これを書き直すと (ただし $\lambda := \Delta t / \Delta x^2$ とおく)

$$(8) \quad U_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \quad (1 \leq i \leq N-1, n = 0, 1, 2, \dots).$$

b) 後退 Euler 法

$$\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, n = 1, 2, \dots).$$

すなわち

$$(9) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, n = 0, 1, \dots),$$

これを書き直すと

$$(10) \quad (1 + 2\lambda)U_i^{n+1} - \lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = U_i^n \quad (1 \leq i \leq N-1, n = 0, 1, 2, \dots).$$

8.1.3 熱方程式に対する差分方程式の導出

- ㉓ θ 法 これは (a) と (b) を “混ぜた” ものである。 $0 \leq \theta \leq 1$ を満たす θ を固定して

$$(11) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \theta \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

これを書き直すと

$$(12) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_i^{n+1} - \theta\lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = [1 - 2(1 - \theta)\lambda]U_i^n + (1 - \theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n).$$

$\theta = 0$ のとき (a) の前進 Euler 法、 $\theta = 1$ のとき (b) の後退 Euler 法と一致する。

そこで以下では (c) θ 法の式のみ書く。 $\theta = 1/2$ の場合は *Crank-Nicolson* 法と呼ばれる。

$u(0, t) = \alpha$ であるから、次の方程式を課するのが自然であろう。

$$(13) \quad U_0^{n+1} = \alpha \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$i = 1$ の場合の (12)、つまり

$$(1 + 2\theta\lambda)U_1^{n+1} - \theta\lambda(U_0^{n+1} + U_2^{n+1}) = (1 - 2(1 - \theta)\lambda)U_1^n + (1 - \theta)\lambda(U_0^n + U_2^n)$$

に (13) を代入して、 U_0^{n+1} を消去し、移項すると

$$(14) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_1^{n+1} - \theta\lambda U_2^{n+1} = (1 - 2(1 - \theta)\lambda)U_1^n + (1 - \theta)\lambda(U_0^n + U_2^n) + \theta\lambda\alpha.$$

$u_x(1, t_n) = \beta$ の近似としては、後退差分近似を用いた

$$\frac{U_N^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta$$

が浮かぶが、この場合の誤差は $O(\Delta x)$ で精度が低い。

番号 i が $N+1$ である仮想格子点 (x_{N+1}, t_{n+1}) を導入すると、

$$(15) \quad \frac{U_{N+1}^{n+1} - U_{N-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \beta$$

という 1 階中心差分近似ができる。この場合の誤差は $O(\Delta x^2)$ であり、後退差分近似よりも精度が高い。

このままでは方程式が不足するので、(12) が $i = N$ の場合にも成立すると仮定する。

$$(1 + 2\theta\lambda)U_N^{n+1} - \theta\lambda(U_{N-1}^{n+1} + U_{N+1}^{n+1}) = (1 - 2(1 - \theta)\lambda)U_N^n + (1 - \theta)\lambda(U_{N-1}^n + U_{N+1}^n).$$

(15) から得られる $U_{N+1}^{n+1} = 2\beta\Delta x + U_{N-1}^{n+1}$, $U_{N+1}^n = 2\beta\Delta x + U_{N-1}^n$ を代入すると

$$(1 + 2\theta\lambda)U_N^{n+1} - 2\theta\lambda U_{N-1}^{n+1} - 2\theta\lambda\beta\Delta x = [1 - 2(1 - \theta)\lambda]U_N^n + 2(1 - \theta)\lambda U_{N-1}^n + 2(1 - \theta)\lambda\beta\Delta x.$$

整理して

$$(16) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_N^{n+1} - 2\theta\lambda U_{N-1}^{n+1} = [1 - 2(1 - \theta)\lambda]U_N^n + 2(1 - \theta)\lambda U_{N-1}^n + 2\lambda\beta\Delta x.$$

8.1.5 差分方程式の行列・ベクトル表記

$2 \leq i \leq N-2$ に対する (12), (14), (16) は次のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} 1+2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & & & \\ -\theta\lambda & 1+2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\theta\lambda & 1+2\theta\lambda & -\theta\lambda & \\ & & & & -2\theta\lambda & 1+2\theta\lambda & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n+1} \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} [1-2(1-\theta)\lambda]U_1^n + (1-\theta)\lambda(U_0^n + U_2^n) \\ \vdots \\ (1-2(1-\theta)\lambda)U_i^n + (1-\theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \\ \vdots \\ (1-2(1-\theta)\lambda)U_N^n + 2(1-\theta)\lambda U_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta\lambda\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\beta\lambda\Delta x \end{bmatrix}.$$

この右辺の第 1 項は ($U_0^n = \alpha$ に注意して) 次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} 1-2(1-\theta)\lambda & (1-\theta)\lambda & & & & & \\ (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & (1-\theta)\lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & (1-\theta)\lambda & \\ & & & & 2(1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{N-1}^n \\ U_N^n \end{bmatrix}.$$

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

簡単のため、境界条件を同次 Dirichlet 境界条件 $u(0, t) = u(1, t) = 0$ とする。

$\mathbf{U}^n := (U_i^n) = (U_1^n \ U_2^n \ \cdots \ U_{N-1}^n)^\top$ とする。あるノルム $\|\cdot\|$ について

$$\sup_n \|\mathbf{U}^n\| \leq \text{初期値と境界値から定まる量}$$

が成り立つとき、**差分スキームは安定**である、という。

最大値ノルム $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_i |x_i|$ については、次の定理から安定性の条件が分かる。☒

定理 8.1 (離散最大値原理)

つねに $\max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq J}} U_i^n = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} U_i^0, \max_{0 \leq n \leq J} U_0^n, \max_{0 \leq n \leq J} U_N^n \right\}$ が成り立つには、
 $\theta = 1$ または $(0 \leq \theta < 1 \text{ かつ } \lambda \leq \frac{1}{2(1-\theta)})$ が必要十分。

例えば桂田 [1] を見よ。 $\theta = 0$ (陽解法) の場合は、 $\lambda \leq \frac{1}{2}$ である (これは有名)。
熱方程式に対する最大値原理という定理もある。これについては、偏微分方程式の入門テキスト (例えば桂田 [3]) を見よ。

8.1.6 差分スキームの安定性 (あらっぽい説明)

差分解に対して ($AU^{n+1} = BU^n$ という形の方程式であるから)

$$U^{n+1} = RU^n$$

のような行列 R が存在することが示される。ゆえに $U^n = R^n U^0$ が成り立つ。

ノルムとして

$$\|x\|_2 := \left(\frac{1}{N} \sum_i |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

を採用した場合は、行列 R のスペクトル半径 (固有値の絶対値の最大値) で安定性の判定ができる。

$$(17) \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \quad \text{または} \quad \left(0 \leq \theta < \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \right)$$

であれば、 R のスペクトル半径が 1 より小さいことが保証され、差分スキームの安定性が導かれる (例えば桂田 [4] を見よ)。

最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を採用した場合の安定性の条件 (離散最大値原理成立条件)

$$(18) \quad \theta = 1 \quad \text{または} \quad \left(0 \leq \theta < 1 \quad \text{かつ} \quad \lambda \leq \frac{1}{2(1-\theta)} \right)$$

と一見似ているが、それよりは緩いことに注意しよう (ノルムの違い)。

8.1.7 大まかなまとめ

前進 Euler 法、後退 Euler 法、 θ 法の差分方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_n) = \Delta u(\cdot, t_n)$$

を、それぞれ

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta u^n,$$

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \Delta u^n \quad \text{すなわち} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta u^{n+1}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta [(1 - \theta)u^n + \theta u^{n+1}]$$

のように、まず時刻について差分近似して、それからさらに空間についても差分近似して得られる、とみなせる(ただし、 $u^n = u(\cdot, t_n)$ とおいた)。

以下では、我々は、時刻について差分近似して、空間については有限要素近似して近似方程式を作ることにする。

8.1.8 熱方程式の初期値境界値問題 (Dirichlet 境界条件) の差分法プログラム

差分法の安定性のお話をしている際に、従来サンプル・プログラムは C+GLSC で記述したものを紹介していたが、そういう環境を持っていない学生がいたので、以前冗談半分に FreeFem++ 言語で**差分法による**プログラムを書いてみた。紹介しておく。

ただし境界条件が $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ($t \in (0, \infty)$) の場合のプログラムである。

— heat1d-e-freefem.edp を入手して実行 —

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heat1d-e-freefem.edp
FreeFem++ heat1d-e-freefem.edp
```

(最初に λ の値を入力する。初期値のグラフを描いて一時停止する。ウィンドウ内で [enter] キーを打って再開。遅いので途中で中断したくなるかも。)

λ が 0.5 の場合、0.51 の場合を比べてみることを勧める。

このプログラムをこの節の例題 (1a), (1b), (1c), (1d) を解くように書き換えた人がいたら、プログラムを下さい。

8.2 熱方程式に対する有限要素法

8.2.1 例題

熱方程式 (内部で熱が発生する or 熱が吸収される) の初期値境界値問題

$$(19a) \quad u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x) \quad ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(19b) \quad u(x, t) = g_1(x) \quad ((x, t) \in \Gamma_1 \times (0, \infty)),$$

$$(19c) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = g_2(x) \quad ((x, t) \in \Gamma_2 \times (0, \infty)),$$

$$(19d) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \bar{\Omega})$$

を考える。多くの設定は、これまで扱ってきた Poisson 方程式の境界値問題に準じる。

- Ω は \mathbb{R}^2 の有界領域で、 $\Gamma := \partial\Omega$ はその境界、 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
- \mathbf{n} は Γ_2 上の点 x における外向き単位法線ベクトルである。
- $u: \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数である。
- $u_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数とする。

$f = f(x, t)$, $g_1 = g_1(x, t)$, $g_2 = g_2(x, t)$ と時間依存している場合の問題を解くのも難しくない。

8.2.2 解法の方針

時間微分については差分法で近似し、空間微分については有限要素法で近似する。つまり前節の最後に書いたように、まず

$$(20a) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta u^{n+1} + f \quad (\text{後退 Euler 法の場合}),$$

あるいは

$$(20b) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta[(1 - \theta)u^n + \theta u^{n+1}] + f \quad (\theta \text{法の場合})$$

と時刻について差分近似してから、各時刻 t_{n+1} で (19b), (19c) と合わせて、 Ω における境界値問題とみなす。すなわち、境界条件は

$$(21a) \quad u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

$$(21b) \quad \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(u^n が既知ならば $-\Delta u^{n+1} + cu^{n+1} = F$. Poisson 方程式ではないが、ほぼ同様に解ける)。

以下、内積の記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, (\cdot, \cdot) , $[\cdot, \cdot]$ や、関数空間 \hat{X}_{g_1} , \hat{X} は Poisson 方程式のときのものを利用する。

8.2.3 熱方程式に対する前進 Euler 法 余談

一応、時刻についての導関数 $\partial u / \partial t$ を前進差分近似した、前進 Euler 法についても述べておく。

弱形式は

$$(22) \quad \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, v \right) - \langle u^n, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \quad (v \in \hat{X}).$$

すなわち

$$(23) \quad (u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t \langle u^n, v \rangle - \Delta t (f, v) - \Delta t [g_2, v] = 0 \quad (v \in \hat{X})$$

となる。

これは私が不勉強なのかもしれないが、この方法を使うプログラムは見たことがない。差分法の場合と違って陽解法でないので (つまり u^{n+1} を求めるのに、結局は連立1次方程式を解く必要がある) メリットがないからだろうか (と考えている)。安定性を調べるのは意味があるので、数値実験してみても良いだろう。

熱方程式のプログラムを説明するために、菊地 [5] の例題を紹介する。

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ \Gamma_1 &= \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}, \\ \Gamma_2 &= \{(1, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\}, \\ -\Delta u &= f \quad (\text{in } \Omega), \\ u &= g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \end{aligned}$$

[5] の C プログラムでは、簡単のため $f \equiv 1$, $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0$ としてある (FreeFem++ ではそうしなくてもプログラムは簡単である)。

以下の FreeFem++ プログラムでは、`square(,)` を使って三角形分割をしている。 Γ_1 と Γ_2 は、それぞれ、1, 4 と 2, 3 というラベルで指定できる。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi-square.edp
```

```
// poisson-kikuchi-square.edp
// https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/poisson-kikuchi-square.edp
// 菊地文雄, 有限要素法概説, サイエンス社

int m=10;
mesh Th=square(m,m);
// plot(Th,wait=true,ps="Th.eps");
savemesh(Th,"Th.msh");
fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=1;
func g1=0;
func g2=0;
solve Poisson(u,v)=
    int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
    -int2d(Th)(f*v)
    -int1d(Th,2,3)(g2*v)
    +on(1,4,u=g1);
plot(u,wait=1,ps="poisson-kikuchi-square.eps");

//3 次元鳥瞰図
//real [int] levels =0.0:0.01:1.0;
//plot(u,dim=3,viso=levels,fill=true,wait=true);
```

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法

まず後退 Euler 法のプログラムを紹介しよう。弱形式は

$$\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v \right) + \langle u^n, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

$$(u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t \langle u^{n+1}, v \rangle - \Delta t (f, v) - \Delta t [g_2, v] = 0.$$

サンプル・プログラムを用意してある。

ターミナルではこうして入手

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heatB.edp
```

次のスライドに載せてある (Δt を tau (τ) という変数名にしてあるのに注意)。

ループの制御変数を n (時間ステップの番号) として、problem に `,init=n` と書き足すのがミソ。最初は n が 0 であるので `init` は `false`、それ以降は $n \neq 0$ であるので `init` は `true`、と指示するのが工夫 (そうしないと毎ステップで行列を再構成してしまう)。連立 1 次方程式の係数行列が時刻 (したがって n) に依らないことに注意しよう。

8.2.4 熱方程式に対する後退 Euler 法 heatB.edp

```
// heatB.edp --- 熱方程式を後退 Euler 法（陰解法）で解く
// https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/heatB.edp
// 菊地文雄，有限要素法概説，サイエンス社の Poisson 方程式の問題の非定常版
int n,m=10;
real Tmax=1, tau=0.01, t;
// 次の 2 行の行頭の // を削除すると、m, tau, theta が実行時に変更できる
// cout << "m dt theta: "; cin >> m >> tau >> theta;
// cout << "m=" << m << ", tau=" << tau << ", theta=" << theta << endl;
mesh Th=square(m,m);
plot(Th,wait=true);
fespace Vh(Th,P1);
func f=1; func g1=0; func g2=0;
func u0=sin(pi*x)*sin(pi*y);
Vh u=u0, uold, v;
plot(u,cmm="t=0",wait=1);
problem heat(u,v,init=n)=
  int2d(Th)(u*v+tau*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))-int2d(Th)(uold*v)
  -int2d(Th)(tau*f*v)-int1d(Th,2,3)(tau*g2*v)
  +on(1,4,u=g1);
for (n=0;n<Tmax/tau;n++) {
  uold=u;
  t=(n+1)*tau;
  heat;
  plot(u,cmm="t="+t,wait=0); // ps="heat"+n+".ps" として保存することも可能
```

メモ: solve と problem にかかわるパラメーター

FreeFem++ ドキュメンテーションの §3.3.13 (Hecht [6]) から。

- `init=`論理型の式

`false` または `0` のとき、行列が再構成 (reconstruct) される、とある。初期化されているかどうか、という意味か？

- `solver=` には LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, sparsesolver, UMFPACK が指定できる (最初の 5 つはアルゴリズムの名前, 説明省略)。

デフォルトでは `sparsesolver` で、それは他の `sparsesolver` が定義されていなければ `UMFPACK` に等しい。それは他の直接法のソルバーが使えない場合は `LU` にセットされる。

行列のメモリーへの格納の仕方は、`solver` により決まる。`LU` の場合は非対称なスカイライン (説明省略)、`Crout` の場合は対称なスカイライン、`Cholesky` の場合は正値対称なスカイライン、`CG` の場合は正値対称な疎行列、その他 (`GMRES`, `sparsesolver`, `UMFPACK`) では疎行列。

- `eps=`実数型の式

反復法の停止則を指定する。

$\varepsilon < 0$ の場合は $\|Ax - b\| < |\varepsilon|$, $\varepsilon > 0$ の場合は $\|Ax - b\| < \frac{|\varepsilon|}{\|Ax_0 - b\|}$

(と書いてあるけれど、 $\frac{\|Ax - b\|}{\|Ax_0 - b\|} < |\varepsilon|$ の間違いではないかな?)

(連立 1 次方程式のアルゴリズムを学んだことがないと、少し分かりにくいかも…)

8.2.5 熱方程式に対する θ 法

$$(24) \quad u^{n+\theta} := \theta u^{n+1} + (1 - \theta)u^n$$

とにおいて

$$(25a) \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \Delta u^{n+\theta} + f \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(25b) \quad u^{n+1} = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

$$(25c) \quad \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

(もし f や g_2 が時間依存する場合は、 f や g_2 は $t = t_{n+1}$ のときの値を用いる。)

弱形式は

$$(26) \quad \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n, v) + \langle u^{n+\theta}, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

すなわち

$$(27) \quad (u^{n+1}, v) - (u^n, v) + \Delta t \theta \langle u^{n+1}, v \rangle + \Delta t (1 - \theta) \langle u^n, v \rangle - \Delta t (f, v) - \Delta t [g_2, v] = 0.$$

記憶用には (26) の方が短くて便利、プログラムを書くには (27) の方が便利であろう。

(補足) FreeFem++ についての注意

弱形式の書き方についての文法が詳しく説明されていない (私が探せないだけ??) ので、良く分からないが、`int2d(Th)()` の括弧内に “複雑な式” を書くと、文法エラーが発生する。エラー・メッセージがとても分かりにくい。

以下に書くことが正しいかは自信がないが、 θ 法のプログラムを書くときなど、ひっかかった場合に参考にしてもらえると良いかも……(頼りない)

- `int2d(Th)(u*v-uold*v)` はエラーになる。
`int2d(Th)(u*v)-int2d(Th)(uold*v)` とすると通る。一方で、
`int2d(Th)(u*v+theta*tau*(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v)))` は通るので、
`*v` が複数回現れるのがまずいと受け取っている (`*dx(v)` や `*dy(v)` は別カウントらしい)。
- `int2d(Th)(u*v)-int2d(Th)(uold*v)` は通るが、
`int2d(Th)((u-uold)*v)` はエラーになる。これはどう考えるべきか。
- `int2d(Th)(tau*f*v)` を `tau*int2d(Th)(f*v)` とするとエラーになる。
定数であっても `int2d(Th)()` の外には出さず、`+int2d()()` あるいは
`-int2d()()` だけで済ませる。

私は極力分けるようにしている。`±int2d(Th)()` の個数が増えて叱られたことはない。

8.2.6 実習課題

次の (2) と (4) が必修課題。

- ① 2つのプログラム (`poisson-kikuchi-square.edp`, `heatB.edp`) を入手&実行し、熱方程式版の最終結果 ($t = T_{\max}$) が、Poisson 方程式の結果とほぼ同じであることを確認せよ。
- ② θ 法のプログラム `heatT.edp` を作成せよ。
- ③ ある程度分割を細かくして、`init=` の指定の効果を調べよ。
(指定しないと遅く、指定しないで `solver=CG` とすると少し速くなるが、CG 法にせず直接法の系統で `init=` を指定した方が速い (ようである) 。)
実行時間は `time` コマンドで計測できる (`time FreeFem++ heatB.edp`) 。
- ④ 安定性について実験的に調べよ。(長方形領域における差分法では、 $1/2 \leq \theta \leq 1$ の場合は無条件安定、 $0 \leq \theta < 1/2$ の場合は $0 < \lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ が安定のための必要十分条件であった。ただし $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ 。)
… 有限要素法の場合は、このような簡単な判定条件は得られないが、 θ が 1 に近い場合と 0 に近い場合で、 Δt を変えることで λ を変えて、安定に計算出来るかどうか試してみる。)
- ⑤ (もし出来れば) 厳密解が分かる問題を選び、誤差を調べよ。
- ⑥ 自分が選んだ問題 (領域などを変える) で数値実験してみよ。

8.2.7 その他

時間発展問題に有限要素法を適用したときの理論的解析について、日本語で読めるテキストはほとんどない (Poisson 方程式の解析より一段以上高度である)。

齊藤 [7] は貴重である。(齊藤 [8] というのもある)。

参考文献

- [1] 桂田祐史：発展系の数値解析,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-0.pdf> (1997 年～).
- [2] 桂田祐史：熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-1.pdf> (1998 年～).
- [3] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」),
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997 年～).
- [4] 桂田祐史：発展系の数値解析の続き,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/heat-fdm-0-add.pdf> (1997 年～).
- [5] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [6] Hecht, F.: Freefem++, <https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>,
以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。(??).
- [7] 齊藤宣一：熱方程式に対する有限要素法と誤差解析, 東大数理科学研究科の「応用数
理特別講義 III」(2004 June) の講義ノートの縮小版. 今は公開していないみたい. 保
存してある (2006 年 3 月 29 日).