応用数値解析特論 レポート課題　補足課題

桂田 祐史

2023 年 7 月 20 日

Oh-! Meiji に PDF 形式で提出する。

最終〆切は 2023 年 7 月 31 日 23:00 であるが、7 月 24 日 22:00 までに 1 次提出すること。1 次提出締め切りまでに提出されたレポートには、7 月 26 日までにフィードバックする。その指示に従い、改訂版を最終〆切までに送ること。

1　問題の背景説明

月日の授業では、次のような実習を行った。

2 次元有界領域 Ω を占める非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) かつ渦なし (ポテンシャルを持つという意味) 流体の定常流を考えよう。

1.1　非圧縮渦無し流体の速度ポテンシャル

仮定より速度場 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}=(x,y)\in\overline{\Omega}$) は速度ポテンシャル ϕ を持つ。すなわち $\phi\colon\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ で、

$$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\phi\quad(\text{in }\Omega).$$

ϕ は次の方程式を満たす。

$$\triangle\phi=0\quad(\text{in }\Omega),\tag{1a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}=v_n\quad(\text{on }\partial\Omega).\tag{1b}$$

ただし v_n は速度場の法線方向の成分である。

$$v_n(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}).$$

($\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ における Ω の外向き単位法線ベクトルである。)

v_n を既知とすると、(1a), (1b) は、 Laplace 方程式の Neumann 境界値問題であり、よく知られている。

この問題が解を持つためには、v_n が

$$\int_{\partial\Omega}v_n\,ds=0\tag{2}$$

を満たすことが必要で ($\because\int_{\partial\Omega}v_n\,ds=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\int_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega 0\,d\boldsymbol{x}=0$)、逆にこの条件が満たされるとき、(1a), (1b) は解を持つことが知られている。ただし ϕ には定数差だけの不定性がある。

条件 (2) の左辺は流束積分と呼ばれ、$\partial\Omega$ を通して単位時間に出入りする流体の量 (面積) を表しているので、条件 (2) は、$\partial\Omega$ を通して、流体の出入りがない (流入した分だけ流出する) ことを意味している。非圧縮流体であるから、この仮定は自然なものと考えられるであろう。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ を計算することで、速度場 $\boldsymbol{v}$ が得られるので、流れが一応は求まったことになるが、次に説明する流線を描くとより分かりやすい。

1.2 非圧縮渦無し流体の流れ関数

流線とは、各点における接ベクトルが、その点における速度場に平行であるような曲線として定義される。定常流においては、流線は流体粒子の軌跡となるので、流線を描くと流れがイメージしやすい。

2 次元の流れにおいては、流線は流れ関数の等高線である。ψ が流れ関数とは、

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

を満たすことを意味する (ただし $\boldsymbol{v} = (u, v)$ とおいた)。$\phi_x = u$, $\phi_y = v$ であるから

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x$$

が成り立つ。これはいわゆる Cauchy-Riemann 方程式で、$\phi + i\psi$ が正則関数となることを意味している。以上より次のことが分かる。

- ϕ の等高線と ψ の等高線は直交曲線群となる。
- ψ も調和関数である: $\triangle\psi = 0$ (in Ω).

条件が良い場合には、流れ関数 ψ も Laplace 方程式の境界値問題の解となる (次の (i), (ii))。

(i) 領域の境界上の点における外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{n}$ とおくと、$\boldsymbol{t}$ は正の向きの境界曲線の単位接線ベクトルとなる。さらに

$$\triangle\psi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{3a}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{t}} = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{3b}$$

が成り立つ (桂田 [?] の §3.3)。

(ii) Ω が Jordan 領域 (1 つの単純閉曲線で囲まれた領域) である場合、流れ関数 ψ の境界上の値を、v_n から計算できる: まず、一般に

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \psi_x dx + \psi_y dy = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} v_n\, ds$$

が成り立つ (桂田 [?] の…あ、授業資料から [?] に書き写すのを忘れている)。ここで $C_{\boldsymbol{x}}$ は Ω 内から任意に選んだ定点 $\boldsymbol{a}$ を始点、$\boldsymbol{x}$ を終点とする Ω 内の任意の曲線であるが、$\boldsymbol{a}$ として境界上の点を選び、境界に沿った曲線とすることが可能である。すなわち、$\boldsymbol{a}$ を境界上に選び、任意の $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ に対して、$\boldsymbol{a}$ から境界に沿って $\boldsymbol{x}$ に至る曲線を $C_{\boldsymbol{x}}$ として

$$g(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} v_n\, ds \tag{4}$$

とおくと、

$$g(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega)$$

が成り立つ。以上より、ψ は次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

$$\triangle\psi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{5a}$$

$$\psi = g \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{5b}$$

速度ポテンシャル ϕ を求めるために、問題 (1a), (1b) を考えるくらいで、v_n は既知のはずだから。(ii) に従って (5a), (5b) を解いて流れ関数 ψ を求めるのが良さそうだ。

2 レポート課題

2.1 自分で問題を作る

自分で選んだ多角形領域 Ω と境界値 v_n に対して、非圧縮渦無し流体の定常流の数値シミュレーションを行う。

領域境界 $\partial\Omega$ を定義域とする関数 v_n は、(2) を満たすように選ぶ。例えば、v_n が、二つの辺 E_1, E_2 で定数 V_1, V_2 で、それ以外の辺においては 0 とすると、

$$\int_{\partial\Omega} v_n\, ds = \int_{E_1} V_1\, ds + \int_{E_2} V_2\, ds = V_1(E_1\,\text{の長さ}) + V_2(E_2\,\text{の長さ})$$

であるから、$V_1 : V_2 = -(E_2\,\text{の長さ}) : (E_1\,\text{の長さ})$ となるように (符号が反対で、絶対値が辺の長さに反比例するように) V_1, V_2 を選べば (2) が満たされる。

$\boldsymbol{a} \in \partial\Omega$ を選び、$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} v_n\, ds \quad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega)$$

を計算することで求める (Ω が多角形領域なので、$C_{\boldsymbol{x}}$ は折れ線で、難しいことはない線積分である)。

2.2 サンプル・プログラムを試す

`potential2d-v2.edp` というサンプル・プログラムを用意した。これは単位円盤領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ を

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &: (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (\theta \in [0, \pi/6]), \\
\Gamma_2 &: (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (\theta \in [\pi/6, \pi]), \\
\Gamma_3 &: (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (\theta \in [\pi, 4\pi/3]), \\
\Gamma_3 &: (x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (\theta \in [4\pi/3, 2\pi])
\end{aligned}$$

という 4 つの部分に分け、

$$v_n = \begin{cases} -2 & (\text{on } \Gamma_1) \\ 1 & (\text{on } \Gamma_3) \\ 0 & (\text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma_4) \end{cases}$$

とした場合のシミュレーション・プログラムである。

ターミナルで実行する

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/potential2d-v2.edp
FreeFem++ potential2d-v2.edp
```

出て来る図は、Ω の三角形分割、ϕ の等高線 (等ポテンシャル線)、ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の矢印表示、ψ の等高線 (流線) やそれらを重ねたものである。

プログラムから、境界上の流れ関数 g の値を読み取り、それが正しいことを納得しよう (v_n が局所的に定数なので、偏角を使って g が計算できる)。

2.3 サンプル・プログラムをたたき台にして自分が選んだ問題を解くプログラムを作る