

応用数値解析特論 第5回

～1次元 Poisson 方程式に対する有限要素法, 2次元 Poisson 方程式に
対する有限要素法～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/>

2023年5月16日

目次

- 1 本日の内容
- 2 1次元の有限要素法
 - モデル問題とその弱定式化
 - 有限要素解の定義
 - 有限要素への分割
 - 区分的 1 次多項式の空間の基底関数
 - 有限要素空間, 有限要素解
 - 蛇足の話
 - 有限要素解を求めるアルゴリズム
 - 長さ座標
 - 弱形式の分割
 - 要素係数行列, 要素自由項ベクトル
 - 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)
 - 具体的にすることのまとめ
 - 連立 1 次方程式の具体形
 - サンプル・プログラム fem1d.c
 - 問題
 - プログラムの解説
 - 実験
 - 参考: 昔の練習問題

- 2 2次元の有限要素法

本日の内容

- いきなり 2次元の有限要素法と格闘する前に、1次元の場合 (菊地 [?] の 3章) を解説する。1次元であっても、多くの重要な考え方に触れることができる。前回のスライドの終わりあたりを含めてある。このスライドの 7 ページくらいから新しい。今日は 6 ページくらいから始めるか。
- 2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (菊地 [?] の 4章):
大筋は前回の 1次元 Poisson 方程式と同様である。
 - 三角形要素上の 1次関数を重み座標 L_i を導入する。
 - 要素係数行列, 要素自由項ベクトルの公式が求まる。
 - 2次元でも直接剛性法が出来る。やや技巧的な部分もあるが、学ぶ価値がある。
- コーディングの詳細は次回に回す。

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間2次元、3次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に[直接剛性法](#)) を理解するために、1次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する2次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

以上は、菊地 [?] を踏襲したものだが、私自身の経験から「分かりやすい」と思っている。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$(1) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0, 1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0, 1)$ 上定義された既知の関数、 α と β は既知の実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

$$X_{g_1} := \{w \in H^1(I) \mid w(0) = \alpha\}, \quad X := \{v \in H^1(I) \mid v(0) = 0\},$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad (f, v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

とおくと、(1) の弱解とは、弱形式

$$(2) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす $u \in X_{g_1}$ のことである。

4.2 有限要素解の定義 要点

要点はすでに予告してある。

有限要素法は**区分的多項式**を試行関数、試験関数に用いる **Ritz-Galerkin 法**である。

一般に、 X_{g_1} , X の有限次元近似 \hat{X}_{g_1} , \hat{X} を定めて、(1つの) Ritz-Galerkin 解が定義される。

区分的多項式というものを定義して、それを用いて適切に \hat{X}_{g_1} , \hat{X} を定めることで有限要素解が定義できる。

4.2.1 有限要素, 区分1次多項式

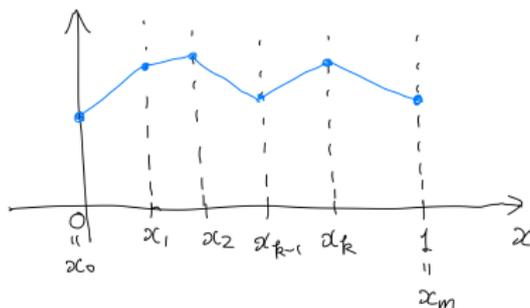
区間 $[0, 1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i ($0 \leq i \leq m$) を**節点 (node)** と呼ぶ。

区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, m$) を**有限要素 (finite element)** と呼ぶ。

区間 $[0, 1]$ 全体で連続で、各要素 e_k 上で1次関数に等しい関数を**区分的1次多項式**と呼び、区分的1次多項式の全体を \tilde{X} と表す。 $\dim \tilde{X} = m + 1$ である。



試行関数 (近似解) \hat{u} , 試験関数 \hat{v} として、区分的1次多項式を採用しよう。言い換えると、試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} , 試験関数の空間 \hat{X} は、 $\hat{X}_{g_1} \subset \tilde{X}$, $\hat{X} \subset \tilde{X}$ を満たすよう定める。

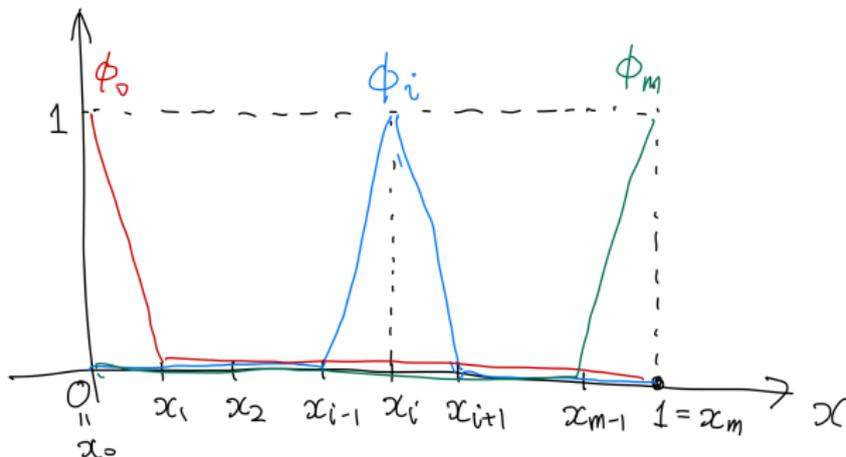
4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

\tilde{X} の基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^m$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的1次多項式で、 x_i では1, 他の節点 x_j ($j \neq i$) では0という値を取る:

- Ⓐ $\phi_i \in C[0, 1]$
- Ⓑ $(\forall k \in \{1, \dots, m\}) (\exists p, q \in \mathbb{R}) (\forall x \in e_k) \phi_i(x) = px + q$
- Ⓒ $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($j = 0, 1, \dots, m$).



4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

補題 5.1 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq m$) に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^m w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \leq j \leq m).$$

すなわち \hat{w} の (ϕ_j に関する) 係数 w_j は、節点 x_j における関数値である。

証明

任意の $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して

$$\hat{w}(x_j) = \sum_{i=0}^m w_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^m w_i \delta_{ij} = w_j \delta_{jj} = w_j.$$

定理 5.2

区分的1次多項式の全体 \tilde{X} は、 $m+1$ 次元の線形空間で、 $\{\phi_j\}_{0 \leq j \leq m}$ は基底をなす。

4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} と試験関数の空間 \hat{X} として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{w} \in \tilde{X} \mid \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} := \left\{ \hat{v} \in \tilde{X} \mid \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$(3) \quad \hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m a_i\phi_i \mid a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\},$$

$$(4) \quad \hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i\phi_i \mid a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\}.$$

このとき定まる Ritz-Galerkin 解を \hat{u} とする。すなわち \hat{u} は

$$(5a) \quad \hat{u} \in \hat{X}_{g_1},$$

$$(5b) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

を満たす。この \hat{u} を区分的 1 次要素 (P1 要素) を用いた **有限要素解** と呼ぶ。

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと、 $1 \leq i \leq m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ を満たす連続な区分的 1 次関数ということと、グラフのイメージを覚えた方がよい。

4.3 有限要素解を求めるアルゴリズム

前項までに有限要素解 \hat{u} は定義された。 \hat{u} は

$$\hat{u} = \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m u_i\phi_i$$

と表すことができるが、 u_i を並べた

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^\top$$

について、連立1次方程式 $\mathbf{A}\mathbf{u}^* = \mathbf{f}^*$ が得られることは、既に(原理的)に分かっている。

しかし、 $A = (\langle\phi_j, \phi_i\rangle)$ や \mathbf{f}^* を実際に計算するのは、やり方を知らないと案外難しい。有限要素法ではこのあたりが良く整備されていて、明快なアルゴリズムが確立されている。

有限要素 e_k ごとに、要素係数行列、要素自由項ベクトルというものを求め、それから A と \mathbf{f} を“組み立てる”。後半の操作を構造力学の用語にちなみ直接剛性法と呼ぶ(直接合成法ではない)。…… 少し長い込み入った話になる。

4.3.1 長さ座標

各要素 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ において

$$\begin{aligned}L_0(x_{k-1}) &= 1, & L_0(x_k) &= 0, \\L_1(x_{k-1}) &= 0, & L_1(x_k) &= 1\end{aligned}$$

で定まる 1 次関数 L_0, L_1 を e_k の長さ座標と呼ぶ (グラフを自分で描こう)。

$$(6) \quad L_0 + L_1 \equiv 1$$

が成り立つ。

また節点の座標 x_{k-1}, x_k を用いて

$$(7) \quad L_0(x) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

と具体的に表わせる (こちらは ϕ_i と違って、後でちょっと用いる)。

$\hat{w} \in \tilde{X}$ に対して $w_i := \hat{w}(x_i)$ とおくと、次式が成り立つ:

$$(8) \quad \hat{w}(x) = w_{k-1}L_0(x) + w_kL_1(x) = \sum_{j=0}^1 w_{k+j-1}L_j \quad (x \in e_k).$$

(たった 2 項なのに \sum を使うのは大げさなようだけれど…)

4.3.2 弱形式の分割

各要素 e_k について

$$(9) \quad \langle u, v \rangle_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x)v'(x)dx, \quad (f, v)_{e_k} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)v(x)dx$$

とおくと、Galerkin 法の弱形式

$$(再掲 2) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta \hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

$$(10) \quad \sum_{k=1}^m \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^m (f, \hat{v})_{e_k} + \beta \hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

と書き直せる ($\because \int_0^1 = \sum_{k=1}^m \int_{e_k}$)。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

このスライドの目標: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k}$, $(f, \hat{v})_{e_k}$, $\hat{v}(1)$ を成分で表す。

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} &= \left\langle \sum_{j=0}^1 u_{k+j-1} L_j, \sum_{i=0}^1 v_{k+i-1} L_i \right\rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 u_{k+j-1} v_{k+i-1} \langle L_j, L_i \rangle_{e_k} \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 v_{k+i-1} A_{ij}^{(k)} u_{k+j-1},\end{aligned}$$

ただし

$$A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}.$$

一方、

$$(f, \hat{v})_{e_k} = \left(f, \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} L_j \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} (f, L_j)_{e_k} = \sum_{j=0}^1 v_{k+j-1} f_j^{(k)},$$

ただし

$$f_j^{(k)} := (f, L_j)_{e_k}.$$

また $\hat{v}(1) = v_m$ より

$$\beta \hat{v}(1) = \beta v_m.$$

2次形式と行列を用いた表記

x_1, \dots, x_m に対する “純粹の2次式”

$$(11) \quad \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j$$

を2次形式とよぶ

$A := (a_{ij})$ とおくと、 A は m 次正方行列であるが

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^m \left(x_i \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right) = Ax \text{ と } x \text{ の内積} = x^T Ax.$$

ここで T は転置 (transpose) を表す。 $\mathbf{b}^T \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ である。

A を2次形式 (11) の係数行列とよぶ。普通は対称行列を選ぶ。

((11) という書き方には冗長性があるので、 $a_{ij} = a_{ji}$ という条件を課すことができる。例えば $3x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_1x_2 + 2x_2x_1$ と書き直せる。)

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

このスライドの目標: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k}$, $(f, \hat{v})_{e_k}$, $\hat{v}(1)$ をベクトル、行列で表す。

そこで

$$(12a) \quad \mathbf{u}_k := \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k := \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$(12b) \quad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$(12c) \quad \mathbf{g}_m := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

とおくと、次式が得られる。

$$(13) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k \quad (k = 1, \dots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}_m^\top \mathbf{g}_m.$$

\mathbf{u}_k , \mathbf{v}_k は要素節点パラメーター・ベクトル、 \mathbf{f}_k は要素自由項ベクトル、 A_k は要素係数行列と呼ばれる。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

プログラムを読み書きするときのために、実際に A_k , f_k を求めよう。

$$\langle L_i, L_j \rangle_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_i'(x) L_j'(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{(x_k - x_{k-1})^2} dx = \frac{\varepsilon}{x_k - x_{k-1}},$$
$$\varepsilon := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -1 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$(14) \quad A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

一方

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) L_j(x) dx \quad (j = 0, 1).$$

この右辺の積分は、 f に応じて何らかの手段 (例えば数値積分) で計算しておく。

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

(このスライドはスキップしても良い。)

f が複雑な関数の場合は、 $f_j^{(k)}$ は厳密に計算できないかもしれないが、節点での値さえ分かれば近似計算 (数値積分) は難しくない。例えば

$$f \doteq f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1 \quad (\text{on } e_k)$$

と 1 次補間近似を利用して

$$f_j^{(k)} = (f, L_j)_{e_k} \doteq (f(x_{k-1})L_0 + f(x_k)L_1, L_j)_{e_k} = f(x_{k-1})(L_0, L_j)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_j)_{e_k}.$$

$x = x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})t$ ($0 \leq t \leq 1$) と変数変換して

$$(L_0, L_0)_{e_k} = (L_1, L_1)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t^2 dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{3},$$

$$(L_0, L_1)_{e_k} = (L_1, L_0)_{e_k} = (x_k - x_{k-1}) \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{x_k - x_{k-1}}{6}.$$

ゆえに

$$(15) \quad \mathbf{f}_k \doteq \frac{(x_k - x_{k-1})}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

4.3.3 要素係数行列, 要素自由項ベクトル

以下の話で必要になる式を再掲しておく。

弱形式は次のように書き直される。

$$(16) \quad \sum_{k=1}^m \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^m (f, \hat{v})_{e_k} + \beta \hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix}$, さらに \mathbf{f}_k , A_k , \mathbf{g}_m を適当に定義すると

$$(17) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k \quad (k = 1, \dots, m),$$

$$(18) \quad \beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}_m^\top \mathbf{g}_m.$$

(16) に代入して

$$(19) \quad \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k + \mathbf{v}_m^\top \mathbf{g}_m.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(12a), (12b), (12c) で与えたベクトル、行列を $m+1$ 次元に拡大する。まず

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。繰り返しになるが、 $u_i = \hat{u}(x_i)$, $v_i = \hat{v}(x_i)$.

\mathbf{f}_k , A_k , \mathbf{g}_m^* については、0 を補って、 \mathbb{R}^{m+1} や $M(m+1; \mathbb{R})$ の元に拡大する:

$$\mathbf{f}_k^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_k^* := \left(\begin{array}{c|cc|c} \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (k = 1, \dots, m), \quad \mathbf{g}_m^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

これらを用いると $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k$, $(f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top f_k$, $\beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}_m^\top \mathbf{g}_m$ であるから)

$$(20) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}^\top A_k^* \mathbf{u}, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}^\top f_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad \beta \hat{v}(1) = \mathbf{v}^\top \mathbf{g}_m^*.$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(20) を用いると、弱形式を書き直した (19) はさらに次のように書き直される。

$$(21) \quad \sum_{k=1}^m \mathbf{v}^\top \mathbf{A}_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^* + \mathbf{v}^\top \mathbf{g}_m^* \quad (\mathbf{v} \in Y).$$

ここで Y は、 $\hat{v} = \sum_{i=0}^m v_i \phi_i$ が \hat{X} に属するような $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_m)^\top$ の全体、すなわち

$$Y := \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \mid v_0 = 0 \right\}.$$

(21) は

$$\mathbf{v}^\top \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k^* \right) \mathbf{u} = \mathbf{v}^\top \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^* \right) \quad (\mathbf{v} \in Y)$$

と書き直せる。ゆえに

$$(22) \quad \mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^*$$

とおけば

$$(23) \quad \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0 \quad (\mathbf{v} \in Y).$$

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

(再掲 23)
$$\mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0 \quad (\mathbf{v} \in Y).$$

これは次と同値である。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ (\lambda, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

つまりは

$$(\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) \text{ の最初の成分以外} = 0.$$

すなわち

(24)
$$\mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{**} &:= \mathbf{A}^* \text{ の第 } 0 \text{ 行を除いた } m \times (m+1) \text{ 行列,} \\ \mathbf{f}^{**} &:= \mathbf{f}^* \text{ の第 } 0 \text{ 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル.} \end{aligned}$$

部分配列を表すための MATLAB 風の記法を使うと、 $\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}^*(\mathbf{1}:m, \mathbf{0}:m)$, $\mathbf{f}^{**} = \mathbf{f}^*(\mathbf{1}:m)$ と書ける。この記法は便利なので以下でも使うことにする。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

A^{**} は正方行列ではない。しかし \mathbf{u} の成分のうち u_0 は未知ではない: $u_0 = \hat{u}(0) = \alpha$.
その部分を右辺に移項しよう。

$$\mathbf{u}^* := \mathbf{u} \text{ の第 } 0 \text{ 成分を除いた } m \text{ 次元縦ベクトル} = (u_1, \dots, u_m)^\top$$

$$\text{i.e. } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix},$$

$A := A^{**}$ の第 0 列を除いた m 次正方行列

$$\text{i.e. } A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} A_{10}^* & \\ \vdots & \\ A_{m0}^* & A \end{array} \right), \quad A := \begin{pmatrix} A_{11}^* & \cdots & A_{1m}^* \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^* & \cdots & A_{mm}^* \end{pmatrix}$$

とおくと

$$A^{**} \mathbf{u} = \left(\begin{array}{c|c} A_{10}^* & \\ \vdots & \\ A_{m0}^* & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{10}^* \\ \vdots \\ A_{m0}^* \end{pmatrix} \alpha + A \mathbf{u}^* = \alpha \begin{pmatrix} A_{10}^* \\ \vdots \\ A_{m0}^* \end{pmatrix} + A \mathbf{u}^*.$$

$\mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A_{10}^* \\ \vdots \\ A_{m0}^* \end{pmatrix}$ とおけば、(24) $A^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}$ は、 $A \mathbf{u}^* = \mathbf{f}$ に書き換えられる。

4.3.4 直接剛性法 (近似方程式の組み立て)

以上のように、局所的な (要素の) 情報から方程式を組み立てる操作を**直接剛性法** (direct stiffness method) という。

(参考情報: 「直接剛性法」は、有限要素法の直接のルーツである**構造力学**に由来する用語である。構造力学の問題において、 A は剛性行列という名前が付いている。)

次のことを覚えておくとよい。

- 係数行列は Dirichlet 境界条件を課す節点の節点番号の行と列を除いたもの
- Dirichlet 境界条件の情報は右辺のベクトルに組み込む
- 未知数は節点パラメーターであり、基底関数は節点に対応して作る

4.3.5 具体的にすることのまとめ (1枚で十分)

第1段 各要素 e_k ($k = 1, 2, \dots, m$) について、 A_k, \mathbf{f}_k を求める:

$$A_k = \begin{pmatrix} \langle L_0, L_0 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_0 \rangle_{e_k} \\ \langle L_0, L_1 \rangle_{e_k} & \langle L_1, L_1 \rangle_{e_k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f(x_{k-1})(L_0, L_0)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_0)_{e_k} \\ f(x_{k-1})(L_0, L_1)_{e_k} + f(x_k)(L_1, L_1)_{e_k} \end{pmatrix},$$

$$\langle L_j, L_i \rangle_{e_k} = \begin{cases} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i = j) \\ -\frac{1}{x_k - x_{k-1}} & (i \neq j), \end{cases} \quad (L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} & (i = j) \\ \frac{x_k - x_{k-1}}{6} & (i \neq j) \end{cases}$$

を計算して、それを $m+1$ 次正方行列 A_k^* , $m+1$ 次元ベクトル \mathbf{f}_k^* に拡大して、

$$A^* := \sum_{k=1}^m A_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_k^* + \mathbf{g}_m^*,$$

それから $A := A^*(1:m, 1:m)$, $\mathbf{f}^{**} := \mathbf{f}^*(1:m)$, $\mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \alpha \begin{pmatrix} A_{10} \\ \vdots \\ A_{m0} \end{pmatrix}$.

第2段 連立1次方程式 $A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \mathbf{f}$ を解いて u_1, \dots, u_m を求めて

$$\hat{u} = \alpha \phi_0 + \sum_{i=1}^m u_i \psi_i.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$\bar{\Omega} = \overline{(0,1)} = [0,1]$ を 4 等分して、各小区間を有限要素と考える。つまり $m = 4$ で

$$x_i := ih \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

ただし $h = 1/4$. そして

$$e_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

すると

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \end{pmatrix}, \quad f_j^{(k)} = \int_{e_k} f(x) L_j(x) dx \quad (L_j \text{ は } k \text{ によるので記号が変}),$$

$$\mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

特に (簡単のため) $f(x) \equiv \bar{f}$ (定数関数) とすると、

$$f_j^{(k)} = \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

$$\begin{aligned}A^* &= A_1^* + A_2^* + A_3^* + A_4^* \\&= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\&+ \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\&= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^* &= \mathbf{f}_1^* + \mathbf{f}_2^* + \mathbf{f}_3^* + \mathbf{f}_4^* + \mathbf{g}_4^* \\&= \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\bar{f}h}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\&= \bar{f}h \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.4 連立 1 次方程式の具体形

最後に $u_0 = u(0) = \alpha$ を代入して u_0 を消去すると

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \bar{f}h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この最後の方程式は、(仮想格子点を導入して、Neumann 境界条件を中心差分近似した) **差分法で得られる連立 1 次方程式と同じ**である。つまり

- 規則的な有限要素分割をしたとき、有限要素法は差分法と近い。
- 差分法で自明でない工夫 (仮想格子点の導入) をして得られた Neumann 境界条件の近似に相当することが、有限要素法ではごく自然に得られる。有限要素法は Neumann 境界条件の近似に強い。

4.4 連立 1 次方程式の具体形

(おまけ) 最後に、境界条件を ($u(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$ から)

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

に替えた、Dirichlet 境界値問題を調べておこう。この場合は、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \bar{f}h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \beta/h \end{pmatrix}.$$

4.5 サンプル・プログラム fem1d.c 4.5.1 問題

以下に紹介する C プログラム fem1d.c は

`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/fem1d.c`

に置いてある。現象数理学科 Mac ならば、ターミナルから

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/fem1d.c
```

で入手できる。コンパイル、実行の仕方はプログラムの先頭部分に注釈として書いてある。

このプログラムが対象としている問題は、 $f \equiv 1$ で、境界条件は同次、すなわち $\alpha = \beta = 0$ の場合である。具体的に書き下すと

$$(25) \quad -u'' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

この問題の厳密解は $u(x) = x(2-x)/2$ である。

4.5.2 プログラムの解説

- `main()` を読むと分かるように、最初に
 - `nnode` 総節点数 (the number of nodes)
 - `nelmt` 総要素数 (the number of elements)
 - `nbc` ディリクレ境界にある接点の個数 (1 または 2)
 - `x[]` 節点の座標
 - `ibc` ディリクレ境界にある接点の節点番号を決めている。
- 連立 1 次方程式を構成するのは、関数 `assem()` で行っている (assemblage)。作業内容は 3 つに分かれる。
 - ① `am`, `fm` を 0 クリアする。
 - ② すべての有限要素について、要素係数行列 `ae`, 要素自由ベクトル `fe` を関数 `ecm()` で計算して (element coefficient matrix)、それぞれ全体係数行列 `am`、全体自由項ベクトル `fm` に算入する。
 - ③ ディリクレ境界上にある節点に対応する部分を修正する。

4.5.2 プログラムの解説

- 関数 `ecm()` で必要となる事項の復習。 $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ とすると、

$$A_k = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} (f, L_0)_{e_k} \\ (f, L_1)_{e_k} \end{pmatrix}$$

であったが、 f を

$$f(x) \doteq f(x_{k-1})L_0(x) + f(x_k)L_1(x) \quad (x \in e_k)$$

と 1 次近似することにすれば、

$$\mathbf{f}_k \doteq \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \begin{pmatrix} 2f(x_{k-1}) + f(x_k) \\ f(x_{k-1}) + 2f(x_k) \end{pmatrix}.$$

4.5.3 実験

fem1d.c のコンパイル&実行& gnuplot によるグラフ描画

```
$ cc -o fem1d fem1d.c
$ ./fem1d
nodal values of u (節点での u の値)
  i      u      i      u      i      u
  0  0.000e+00  1  9.500e-02  2  1.800e-01
  3  2.550e-01  4  3.200e-01  5  3.750e-01
  6  4.200e-01  7  4.550e-01  8  4.800e-01
  9  4.950e-01 10  5.000e-01

$ cat fem1d.out
0.000000 0.000000
0.100000 0.095000
0.200000 0.180000
0.300000 0.255000
0.400000 0.320000
0.500000 0.375000
0.600000 0.420000
0.700000 0.455000
0.800000 0.480000
0.900000 0.495000
1.000000 0.500000

$ gnuplot
gnuplot> plot "fem1d.out" with lp, x*(2-x)/2
```

4.5.3 実験

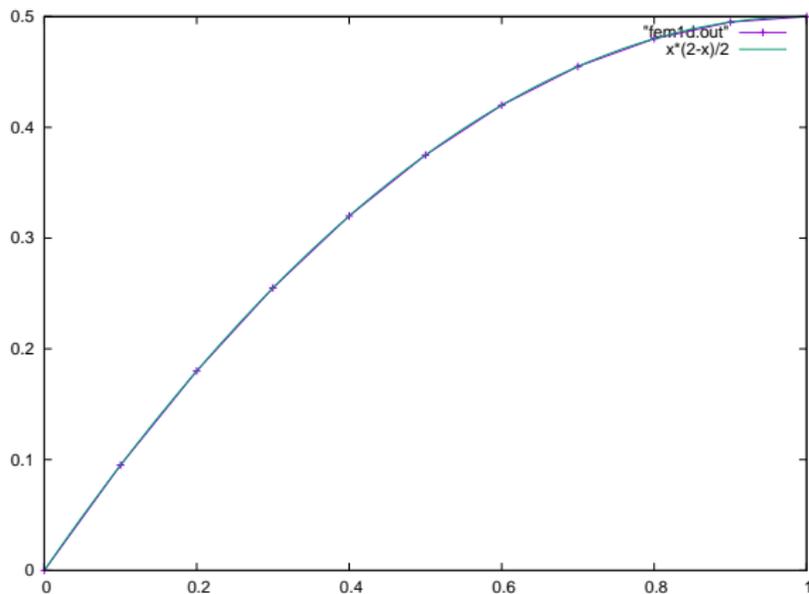


図 1: fem1d.c の計算結果 ($m=10$) と厳密解 $\frac{x(2-x)}{2}$ のグラフを重ね書き

4.5.4 参考: 昔の練習問題

FreeFem++ がまだなかった頃、有限要素法のプログラムを、C 言語や Fortran のようなプログラミング言語で書いていました。

そのときは (アルゴリズムの理解する助けになると考えて) 以下のような練習問題を出していました。参考まで。

- ① 両側ディリクレ条件 $u(0) = u(1) = 0$ の問題を解く。
- ② 非同次ディリクレ条件 $u(0) = \alpha$ の問題を解く。
- ③ 非同次 Neumann 条件 $u'(1) = \beta$ の問題を解く。
- ④ $-(pu')' = f$ という一般の楕円型方程式の問題を解く。
(p は $\min_x p(x) > 0$ を満たす既知の関数)

5 2次元の有限要素法

第2回の授業で扱った Poisson 方程式の境界値問題を題材に、2次元領域における有限要素法を説明する (菊地 [?] 第5章)。

(思い出す) Ω は \mathbb{R}^2 の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1, Γ_2 は条件

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、次の Poisson 方程式の境界値問題を考える。

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$(26) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$(27) \quad u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1,$$

$$(28) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2,$$

ここで \mathbf{n} は Γ の外向き単位法線ベクトルを表す。

大筋は1次元の場合と同様だが、(i) 各要素内の計算に面積座標を使うところと、(ii) 直接剛性法が2次元でも実現可能であることを理解するところが要点となる。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し、 $\bar{\Omega}$ を三角形 e_k ($1 \leq k \leq N_e$) に分割する:

$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k.$$

ただし、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。

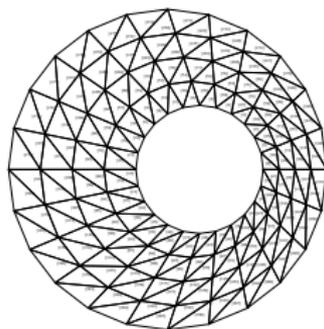


図 2: 二つの円で囲まれた閉領域 $\bar{\Omega}$ を三角形の合併で近似する

Ω が多角形でない限り、境界は「曲がっている」。 $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k$ は期待できない。

各三角形を **三角形 (有限) 要素** とよぶ。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

N_e は要素の総数 (the number of elements) で、プログラムでは NELMT のような名前の変数で記憶されることが多い。

有限要素の頂点を節点 (node) と呼び、 $\{P_i\}_{i=1}^m$ のように番号をつけておく。

m は節点の総数 (the number of nodes) で、プログラムでは NNODE のような名前の変数で記憶されることが多い。

注意 1次元の場合、節点の個数 = 要素の個数 + 1 という簡単な関係が成立していた。(区間を m 等分したとき、 m を用いて、要素を e_k ($1 \leq k \leq m$), 節点を x_k ($0 \leq k \leq m$) と番号づけることが出来た。) 2次元の場合は、そのような関係はない。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

$\hat{\Omega}$ 上連続で、各有限要素 e_k 上で x と y の1次多項式関数に等しいものを、**区分的1次多項式**と呼び、その全体を \tilde{X} で表わす (\tilde{X} はここだけの記号)。

$\{e_k\}_{k=1}^{N_e}$ と \tilde{X} の対を**区分的1次有限要素** (piecewise linear finite element) と呼ぶ。

2変数の1次関数 $z = a + bx + cy$ のグラフは平面であるから、 \tilde{X} のグラフは、空間内の三角形を連続につなげた“折れ面”である。

試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} , 試験関数の空間 \hat{X} は次のように選ぶ。

$$(29) \quad \hat{X}_{g_1} = \left\{ \hat{w} \in \tilde{X} \mid \hat{w} = \hat{g}_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}, \quad \hat{X} = \left\{ \hat{v} \in \tilde{X} \mid \hat{v} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

(\hat{g}_1 は g_1 に近い計算しやすい関数)

\tilde{X} の基底関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ は

$$(30a) \quad \phi_i \in \tilde{X} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(30b) \quad \phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

満たすものを採用する (この条件で一意に確定し、線形独立であることに注意)。

5.2 三角形 e 上の 1 次関数 L_i と $(L_j, L_i)_e, \langle L_j, L_i \rangle_e$

5.2.1 三角形の面積

平面上の三角形要素 e を考える (本来は、以下の N_i, L_i も含めて、要素によるので、 e_k, N_i^k, L_i^k のように書いた方が良くもしいないが、うっとうしいので k は略する)。

e に属する節点を、反時計まわりに $N_i = (x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2$) とする。

後でしばしば必要になるので、 e の面積 $|e|$ を計算しておこう。

$$\begin{aligned} |e| &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)]. \end{aligned}$$

1 次多項式全体を P^1 と表す:

$$P^1 := \{ \hat{u} \mid (\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \hat{u}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \}.$$

任意の $\hat{u} \in P^1$ は、3 節点 N_i における値 $u^i := \hat{u}(N_i)$ ($i = 0, 1, 2$) を指定すれば定まる ($u_i = \hat{u}(P_i)$ と混同しないように上に添字をつけた)。これは、直観的に明らかであるが (平面は、その上にある 3 点 (ただし同一直線上にはないとする) を指定すれば定まる)、すぐ後で証明する。

5.2.2 三角形要素の面積座標 L_i

節点 N_i で 1, 他の節点で 0 となる 1 次関数を L_i とする ($i = 0, 1, 2$)。つまり

$$(31a) \quad L_i \in P^1,$$

$$(31b) \quad L_i(N_j) = L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (j = 0, 1, 2).$$

(L_0, L_1, L_2) は P^1 の基底になる。実際、1 次独立性はすぐ分かり、 $\dim P^1 = 3$ であるから、任意の $\hat{u} \in P^1$ は、

$$(32) \quad \hat{u}(x, y) = \sum_{i=0}^2 u^i L_i(x, y) \quad ((x, y) \in e)$$

と表される。

任意の $P \in e$ に対して、3 実数 $(L_0(P), L_1(P), L_2(P))$ を P の面積座標 (area coordinate) あるいは重心座標 (barycentric coordinate) と呼ぶ。(色々裏があるけれど今回は駆け足で進む。)

任意の $P \in e$ に対して次式が成り立つ。

$$L_0(P) + L_1(P) + L_2(P) = 1.$$

(P^1 の基底としては 3 つ必要だが、座標としては 2 つで十分ということになる。)

以下、 L_i のグラフの鳥瞰図と等高線を描こう。

Mathematica のコード例と実行結果

```
xs = {0, 3, 1}; ys = {0, 1, 2};  
{a, b, c} = Inverse[Transpose[{{1, 1, 1}, xs, ys}]];  
L[i_, x_, y_] := a[[i]] + b[[i]]*x + c[[i]]*y  
xmin = Min[xs]; xmax = Max[xs]; ymin = Min[ys]; ymax = Max[ys];  
gbase = RegionPlot[L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0,  
  {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]  
gb=Table[Plot3D[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},  
  RegionFunction -> Function[{x, y, z},  
  L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]  
gc=Table[ContourPlot[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},  
  RegionFunction -> Function[{x, y, z},  
  L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]
```

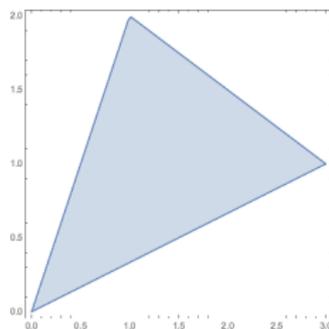


図 3: 三角形要素

ターミナルで入手して開く

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana/20221024.nb  
open 20221024.nb
```

Mathematica のコード例と実行結果

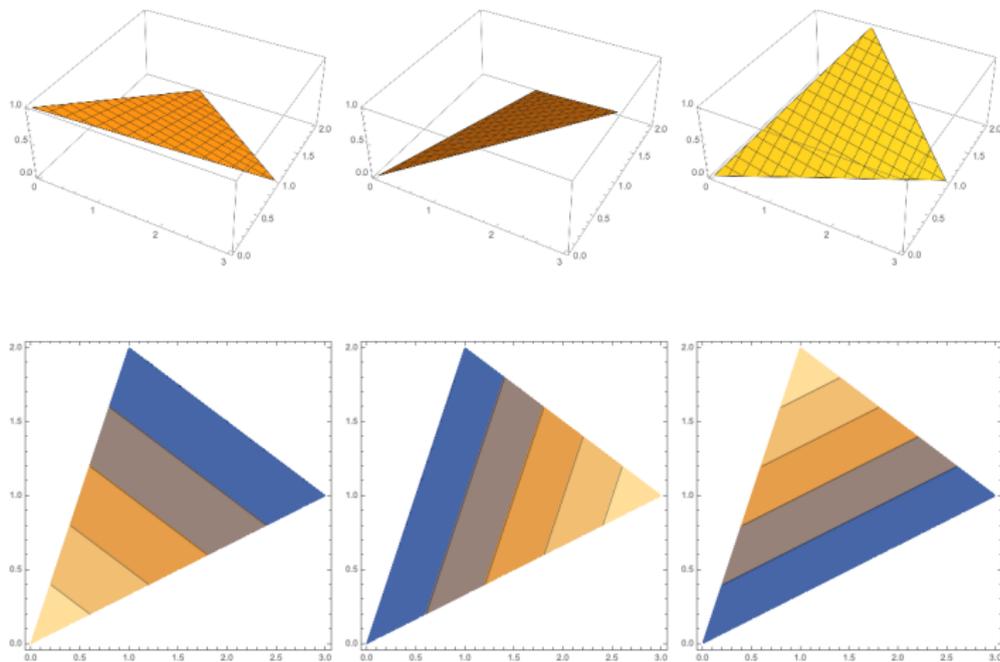


図 4: 左から L_0 , L_1 , L_2 の鳥瞰図と等高線

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

面積座標の積の積分については、便利な公式がある。

0 以上の任意の整数 i, j, k に対して

$$(33) \quad \iint_e L_0(x, y)^i L_1(x, y)^j L_2(x, y)^k dx dy = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}.$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

証明 $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ で囲まれる三角形を Δ とし、1 次関数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(P_0) = N_0, \quad \varphi(P_1) = N_1, \quad \varphi(P_2) = N_2$$

で定める。このとき

$$\varphi(\Delta) = e,$$

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = 2|e|.$$

ゆえに変数変換 $(x, y) = \varphi(u, v)$ を行なうと

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= \iint_{\Delta} L_0(\varphi(u, v))^i L_1(\varphi(u, v))^j L_2(\varphi(u, v))^k |\det \varphi'(u, v)| du dv. \\ &= 2|e| \iint_{\Delta} L_0(\varphi(u, v))^i L_1(\varphi(u, v))^j L_2(\varphi(u, v))^k du dv. \end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$L_i(\varphi(u, v))$ は (1 次関数と 1 次関数の合成であるから)、 u, v についての 1 次関数で、

$$L_i(N_j) = L_i(\varphi(P_j)) = \delta_{ij}$$

を満たすことから

$$L_0(\varphi(u, v)) = 1 - u - v, \quad L_1(\varphi(u, v)) = u, \quad L_2(\varphi(u, v)) = v$$

(各等式の両辺は 1 次関数で、 N_j での値が一致するから、全体で一致する)。

ゆえに

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \iint_{\Delta} (1-u-v)^i u^j v^k du dv \\ &= 2|e| \int_0^1 u^j \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv \right) du. \end{aligned}$$

右辺の内側の積分で、 $v = (1-u)t$ ($0 \leq t \leq 1$) と変数変換すると

$$dv = (1-u)dt, \quad (1-u-v)^i = ((1-u) - (1-u)t)^i = (1-u)^i (1-t)^i$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv &= \int_0^1 (1-u)^i (1-t)^i (1-u)^k t^k \cdot (1-u) dt \\ &= (1-u)^{i+k+1} \int_0^1 (1-t)^i t^k dt. \end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

ゆえに

$$\begin{aligned}\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \int_0^1 (1-u)^{i+k+1} u^j du \int_0^1 (1-t)^i t^k dt \\ &= 2|e| B(i+k+2, j+1) B(i+1, k+1).\end{aligned}$$

ただし B は次式で定義されるベータ関数である:

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt \quad (p, q > 0).$$

このベータ関数と、ガンマ関数

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

について、次の有名な公式が成り立つ (証明は例えば桂田 [?] § E.2 の 命題 E.2.4)。

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \frac{\Gamma(i+k+2)\Gamma(j+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} \cdot \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+k+2)} \\ &= 2|e| \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}. \quad \square\end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$i = j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k, ℓ とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^2 L_k^0 L_\ell^0 dx dy = 2 |e| \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{1}{6} |e|.$$

$i \neq j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^1 L_j^1 L_k^0 dx dy = 2 |e| \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{1}{12} |e|.$$

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

$$L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$$

とおくと

$$\delta_{ij} = L_j(x_i, y_i) = a_j + b_j x_i + c_j y_i = (1 \ x_i \ y_i) \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$$

であるから

$$(\heartsuit) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 2|e| > 0.$$

ゆえに A は逆行列を持つ。

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

(♡) から

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Cramer の公式によって

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \\ -(x_0 y_2 - y_0 x_2) & y_2 - y_0 & -(x_2 - x_0) \\ x_0 y_1 - y_0 x_1 & -(y_1 - y_0) & x_1 - x_0 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & x_2 y_0 - y_2 x_0 & x_0 y_1 - y_0 x_1 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_0 & y_0 - y_1 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 & x_1 - x_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

A^{-1} の下 2 行 b_k, c_k ($k = 0, 1, 2$) が得られれば、 $\langle L_j, L_i \rangle_e$ が計算できる:

$$(34) \quad \begin{aligned} \langle L_j, L_i \rangle_e &= \iint_e \nabla L_j \cdot \nabla L_i \, dx \, dy = \iint_e \begin{pmatrix} b_j \\ c_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} \, dx \, dy \\ &= (b_j b_i + c_j c_i) |e|. \end{aligned}$$

5.3 要素係数行列の計算

「積分は積分範囲を分割して計算し、後から和を取ればよい」ので、弱形式

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

$$(35) \quad \sum_{k=1}^{N_e} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \hat{v})_{e_k} + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

となる。ただし

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} := \int_{e_k} \nabla \hat{u}(x) \cdot \nabla \hat{v}(x) dx, \quad (f, \hat{v})_{e_k} := \int_{e_k} f(x) \hat{v}(x) dx, \quad [g_2, \hat{v}] := \int_{\Gamma_2} g_2 \hat{v} d\sigma.$$

そこで $u^j := \hat{u}(N_j)$, $v^j := \hat{v}(N_j)$ ($j = 0, 1, 2$) を用いて、

$$\hat{u} = \sum_{j=0}^2 u^j L_j, \quad \hat{v} = \sum_{i=0}^2 v^i L_i \quad (e_k \text{ 上})$$

と表すと

$$(36) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 v^i A_{ij}^{(k)} u^j, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \sum_{i=0}^2 v^i f_i^{(k)},$$

ただし

$$(37) \quad A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}, \quad f_i^{(k)} := (f, L_i)_{e_k}.$$

5.3 要素係数行列の計算

そこで

$$(38a) \quad \mathbf{u}_k := \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k := \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$(38b) \quad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおくと、 A_k は対称行列で、

$$(39) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^T A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{f}_k.$$

(線積分 $[g_2, \hat{v}]$ については、今回の授業では説明を省略する。とりあえず $g_2 = 0$ と考えて授業を聴いて下さい。桂田 [?] には書いてある。)

$A_{ij}^{(k)} = \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$ の計算は (34) で済んでいる。

5.3 要素係数行列の計算 具体的な成分の計算

$f_i^{(k)} = (f, L_i)_{e_k}$ については、例えば L_i を 1 次関数補間して

$$(f, L_i)_{e_k} \doteq \left(\sum_{j=0}^2 f(N_j) L_j, L_i \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^2 f(N_j) (L_j, L_i)_{e_k}.$$

のように近似すれば

$$(L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} |e_k|/6 & (i = j \text{ のとき}), \\ |e_k|/12 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

であるから

$$f_0^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (2f(N_0) + f(N_1) + f(N_2)),$$

$$f_1^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + 2f(N_1) + f(N_2)),$$

$$f_2^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + f(N_1) + 2f(N_2)).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$u_i := \hat{u}(P_i)$, $v_i := \hat{v}(P_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) として、

$$(40) \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。

有限要素 e_k ($k = 1, 2, \dots, N_e$) の節点 N_0, N_1, N_2 に対して、

$$N_0 = P_{i_{k,0}}, \quad N_1 = P_{i_{k,1}}, \quad N_2 = P_{i_{k,2}}$$

となる整数 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$ を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

$\mathbf{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 = $f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 = $f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 = $f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$\mathbf{f}_k^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ 0 & \dots & 0 & f_0^{(k)} & 0 & \dots & 0 & f_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & f_2^{(k)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

このように \mathbf{f}_k^* を定義すると、次が成り立つ。

$$(41) \quad (\mathbf{f}, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k = \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

同様の考え方で、行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ を

$$\begin{aligned} a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{00}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{01}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{02}^{(k)}, \\ a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{10}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{11}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{12}^{(k)}, \\ a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{20}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{21}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{22}^{(k)}, \\ && \text{それ以外} &= 0 \end{aligned}$$

で定める。例えば $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$ ならば

$$A_k^* = \begin{pmatrix} i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} & \leftarrow i_{k,0} & \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \leftarrow i_{k,1} & \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \leftarrow i_{k,2} & \end{pmatrix} \quad (\text{書いてない成分は 0}).$$

これを用いると

$$(42) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k = \mathbf{v}^\top A_k^* \mathbf{u} \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ゆえに弱形式 (35) は ($g_2 = 0$ と考えている)

$$\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{A}_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^*$$

すなわち

$$\mathbf{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{A}_k^* \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

ゆえに

$$\mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{A}_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^*$$

とおけば

$$(43) \quad \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0.$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ここで \mathbf{v} は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; v_i = 0 \quad (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(43) は次と同値である。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; w_i = 0 \quad (P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

$$(44) \quad \mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$

ここで

$\mathbf{A}^{**} := \mathbf{A}^*$ の第 i 行 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた行列,

$\mathbf{f}^{**} := \mathbf{f}^*$ の第 i 成分 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた縦ベクトル.

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$$I := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq m\}, \quad I_1 := \{i \in I \mid P_i \in \Gamma_1\}$$

とおく (I_1 は Γ_1 上にある節点の節点番号全体の集合)。

条件

$$u_i = g_1(P_i) \quad (i \in I_1)$$

があるから、これを代入して u_i ($i \in I_1$) を消去できる。以下それを実行する。

A^{**} を列ベクトルで

$$A^{**} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_m)$$

のように表示すると、(44) は

$$(45) \quad \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**}.$$

左辺の $\sum_{i=1}^m$ を $\sum_{i \in I \setminus I_1} + \sum_{i \in I_1}$ と分解して、移項すると

$$\sum_{i \in I \setminus I_1} \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \mathbf{a}_i u_i.$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ゆえに

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f},$$

ただし

$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}$ の第 i 成分 ($i \in I_1$) を除いた縦ベクトル,

$A := A^{**}$ の第 i 列 ($i \in I_1$) を除いた正方行列,

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \mathbf{a}_i u_i.$$

実際にプログラムを作成するとき、 A や \mathbf{f} が容易に求められることは次回解説する。

参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008).
- [3] 桂田祐史：有限要素法への入門, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/members/fem.pdf>. 内容は Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法です。これは菊地 [?] の読書ノートの性格が強いので、一般公開はしていません。授業を受講する学生に見せることがあります。(2001~).