

応用数値解析特論 第4回

～Poisson 方程式に対する Ritz-Galerkin 法 (2)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/>

2023年5月9日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法 (続き)
 - Galerkin 法 (続き)
 - X_{g1} , X の有限次元近似
 - 問題 (\widehat{W})
 - 問題 (\widehat{W}')
 - 連立 1 次方程式の導出
 - 連立 1 次方程式の一意可解性
 - Ritz 法
 - 問題 (\widehat{V}')
 - 誤差最小の原理
 - 古典的 Ritz-Galerkin 法
 - 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法
- 3 1次元の有限要素法
 - モデル問題とその弱定式化
 - 有限要素解の定義
 - 有限要素への分割
 - 区分的 1 次多項式の空間の基底関数
 - 有限要素空間, 有限要素解
 - 蛇足の話
- 4 参考文献

- FreeFem++ version 4.12 は macOS がかなり古くても大丈夫 (Intel Mac の Mojave にインストールできた)。
- 今日は Ritz-Galerkin 法の続き。そこまでやると、FreeFem++ のプログラムがとりあえず理解できる…かな??

前回の最後の部分のスライドをつけておく。新しい話はこのスライドの4ページから。

3.1 Galerkin 法 3.1.1 X_{g_1} , X の有限次元近似

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法** である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で u や v の近似関数を作る。より具体的には関数空間 X_{g_1} , X の有限次元近似 \hat{X}_{g_1} , \hat{X} を作るため

- (1) $\hat{g}_1 \doteq g_1$ on Γ_1
(2) $\psi_i = 0$ on Γ_1 ($i = 1, 2, \dots, m$)

となる \hat{g}_1 と、1 次独立な $\psi_i \in X$ ($i = 1, \dots, m$) を適当に選び、

$$(3) \quad \hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$(4) \quad \hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく。以下 $\{\psi_i\}$ のことを**基底関数** (basis functions) と呼ぶ。

3.1 Galerkin 法 3.1.2 問題 (\hat{W})

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解 u を \hat{X}_{g_1} の要素 \hat{u} で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 (\hat{W})

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$(5) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、 \hat{u} を**試行関数 (trial function)**, \hat{v} を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

余談 4.1 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間 \hat{X} として、試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} とよく似たもの (ともに ψ_i で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法 (method of weighted residuals, weighted residual methods)** と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、と言うことが出来る。

3.1 Galerkin 法 3.1.3 問題 (\widehat{W}')

問題 (\widehat{W}) の方程式 (5) が $\hat{v} \in \hat{X}$ につき線形で、 \hat{X} が $\{\psi\}_{i=1,2,\dots,m}$ で張られることから、(\widehat{W}) は、次の問題 (\widehat{W}') と同値であることが分かる。

問題 (\widehat{W}')

Find $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ s.t.

$$(6) \quad \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

実際、 $\psi_i \in \hat{X}$ であるから、 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が、(5) を満たすならば、(6) を満たす。

逆に $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ が (6) を満たすならば、任意の a_i をかけて i について加えることで

$$\sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\left\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right\rangle = \left(f, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right) + \left[g_2, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right].$$

これは (5) が成り立つことを意味する。

□

3.1 Galerkin 法 3.1.4 連立 1 次方程式の導出

方程式 (6) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ であるから、ある a_j ($j = 1, \dots, m$) が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j$$

と表せる。これを (6) に代入すると

$$\left\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j, \psi_i \right\rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

すなわち

$$(7) \quad \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

この (7) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

3.1.4 連立1次方程式の導出

ゆえに

$$(8) \quad \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

ただし、

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle),$$

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = ((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle).$$

$f, g_2, \hat{g}_1, \{\psi_i\}$ が与えられれば \mathbf{A}, \mathbf{f} は定まる。 \mathbf{u} は未知ベクトルである。
この連立1次方程式 (8) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

補題 4.2 (Galerkin 法の一意的可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$ で、 $\{\psi_i\}$ は 1 次独立とする。このとき A は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (8) は一意的可解である。

復習: 実対称行列 A に対して、 A が正値 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A$ の固有値がすべて正 ($\Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$). 特に正値対称行列は正則である。

($\{\psi_j\}$ を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ は、もとの問題の解の一意的性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明 A の対称性 ($\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$) は明らかである。 A の正値性を示す。任意の $\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ に対して

$$\hat{\mathbf{v}} := \sum_{j=1}^m b_j \psi_j$$

とおくと、 ψ_j の 1 次独立性から $\hat{\mathbf{v}} \neq 0$ であり、実は $\|\hat{\mathbf{v}}\| > 0$ である。

(\because もしも $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 0$ ならば、 $\|\cdot\|$ の定義から、 $\hat{\mathbf{v}}$ は定数関数であるが、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ から、 $\hat{\mathbf{v}}$ は少なくとも 1 点 (Γ_1 の任意の点) で 0 に等しく、 $\hat{\mathbf{v}} \equiv 0$ が導かれ、矛盾が生じる。)

3.1 Galerkin 法 3.1.5 連立 1 次方程式の一意可解性

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \psi_j, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_i \left(\sum_{j=1}^m \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \mathbf{b}^\top \mathbf{A} \mathbf{b}$$

となる。従って A は正値である。 □

注意 4.3 (記号 $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$)

ここで \mathbf{b}^\top は、縦ベクトル \mathbf{b} を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ は、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に \mathbb{C}^m において、 $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積である。

10月10日の授業では、次の §3.2 は省略して、§3.3 を説明し、そこで時間切れとなりました。§3.4 以降は、次回の授業に回します。

3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 (\hat{V})

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法** である。具体的には次の問題を考える。

問題 (\hat{V})

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}].$$

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、(\hat{W}) と (\hat{V}) も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法** と呼ばれる。

3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 (\hat{V}')

ちなみに (\sum や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$I[\hat{u}] = \frac{1}{2} \|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \hat{g}_1) \\ - \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i]$$

となる。これから極値の条件は¹

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

これは、もちろん Galerkin 法で得た (7) と同じである。

¹ $\frac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$ に注意。一般に $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ ($x \in \mathbb{R}^n$) とするとき、 $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + b$ となる。特に A
が対称ならば $\nabla f(x) = Ax + b$ 。1 変数の $(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c) = ax + b$ の拡張。

やってみよう

$$\nabla\left(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c\right) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$$

微積分の授業などで聞いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数2次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^n b_k x_k + c.\end{aligned}$$

これを x_i で偏微分すると？ (スライド PDF の末尾を見よ。)

3.3 誤差最小の原理

定理 4.4 (誤差最小の原理)

Ritz-Galerkin 解 \hat{u} は \hat{X}_{g_1} の中で (ある意味で) 最も u に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、 u から超平面 \hat{X}_{g_1} への射影 \hat{u} の図を板書する。)

3.3 誤差最小の原理

証明 まず \hat{u} は、 u から \hat{X}_{g_1} に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ($\hat{X} \subset X$ に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$ に対して、 $\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$ ゆえ、 \hat{v} のところに $\hat{u} - \hat{w}$ を代入して

$$(\hat{u} \text{ は垂線の足}) \quad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0.$$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。

□

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、 $\{\psi_j\}$ を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

例 4.5 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式?) の境界値問題を考えよう。

$$(9) \quad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで f は开区間 $(0, 1)$ 上定義された既知関数である。

$\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $g_1 = 0$ である。

$\hat{g}_1 = 0$ とするのが自然である。 $\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \leq j \leq m)$$

とおくと $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$ すなわち $\psi_j = 0$ on Γ_1 ($1 \leq j \leq m$) であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$ は、次のように表せる。

$$(10) \quad \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x).$$

例 4.5 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$ であるから、 $[g_2, \cdot]$ という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = (\psi_j', \psi_i') = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$

例 4.5 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (10), (11) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- ψ_j は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素 $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ の固有関数である。これは“対称な作用素”であるため、直交性

$$i \neq j \Rightarrow (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \Rightarrow \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列 A が対角行列となって、計算が簡単になっている。

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

例 4.6 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ において、Poisson 方程式 $-\Delta u = f$ に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ($\Gamma_1 = \Gamma$, $g_1 = 0$ である)。このとき $\{\psi_k\}$ として

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

を採用するのが便利である (ここで $m \in \mathbb{N}$)。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{kl}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4} (ki + lj) \delta_{ki} \delta_{lj} \quad (1 \leq i, j, k, l \leq m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \varphi_{k\ell}$$

とおくと、

と お き ま す

例 4.6 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ &\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m).\end{aligned}$$

例えば $f \equiv 1$ (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dx dy = \frac{[(-1)^{i+1} + 1] [(-1)^{j+1} + 1]}{ij\pi^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \dots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

- ① 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
- ② Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

- ③ 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

余談 4.7 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [2] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「I 君の固有値問題」 (1992/11)

そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。

有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

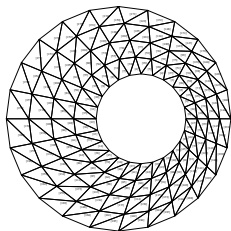
- 領域を

- 1次元の場合 区間

- 2次元の場合 三角形, 四角形

- 3次元の場合 三角錐, 四面体

などの簡単な図形 — 有限要素 (finite element) と呼ぶ — に分割する:



$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^m e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ($\hat{\Omega}$ で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

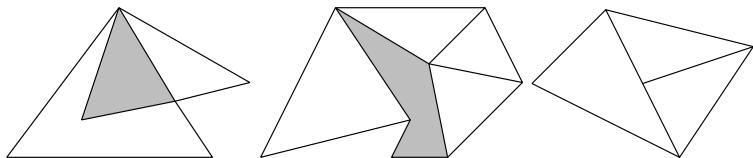


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

やってみよう の解答

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_j) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_k + \frac{\partial}{\partial x_i} c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} (\delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}) + \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} + \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{ij} \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left(Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^T x \text{ の第 } i \text{ 成分} \right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\ &= \frac{1}{2} (A + A^T)x + b \text{ の第 } i \text{ 成分.} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla \left(\frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) = \frac{1}{2} (A + A^T)x + b.$$

ここで

4 1次元の有限要素法

有限要素法が実際に利用されるのは、空間 2 次元, 3 次元の問題がほとんどであるが、ここでは計算手順の概要 (特に[直接剛性法](#)) を理解するために、1 次元の Poisson 方程式の境界値問題に対する有限要素法の説明を行う。

このすぐ後に説明する 2 次元の場合を分かりやすくするためという趣旨である (いきなり全部やると大変)。

以上は、菊地 [1] を踏襲したものだが、私自身の経験から「分かりやすい」と思っている。

4.1 モデル問題とその弱定式化

問題 (P) の 1 次元版である、常微分方程式の境界値問題

$$(12) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & (x \in (0, 1)) \\ u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta \end{cases}$$

を考える。ここで f は $(0, 1)$ 上定義された既知の関数、 α と β は既知の実定数である。(要するに $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma = \{0, 1\}$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \{1\}$, $g_1 = \alpha$, $g_2 = \beta$ である。)

$$X_{g_1} := \{w \in H^1(I) \mid w(0) = \alpha\}, \quad X := \{v \in H^1(I) \mid v(0) = 0\},$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad (f, v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

とおくと、(12) の弱解とは、弱形式

$$(13) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + \beta v(1) \quad (v \in X)$$

を満たす $u \in X_{g_1}$ のことである。

4.2 有限要素解の定義 要点

要点はすでに予告してある。

有限要素法は**区分的多項式**を試行関数、試験関数に用いる **Ritz-Galerkin 法**である。

一般に、 X_{g_1} , X の有限次元近似 \hat{X}_{g_1} , \hat{X} を定めて、(1つの) Ritz-Galerkin 解が定義される。

区分的多項式というものを定義して、それを用いて適切に \hat{X}_{g_1} , \hat{X} を定めることで有限要素解が定義できる。

4.2.1 有限要素, 区分1次多項式

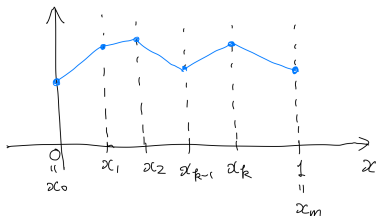
区間 $[0, 1]$ を m 個の小区間に分割する:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1.$$

x_i ($0 \leq i \leq m$) を**節点 (node)** と呼ぶ。

区間 $e_k := [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, m$) を**有限要素 (finite element)** と呼ぶ。

区間 $[0, 1]$ 全体で連続で、各要素 e_k 上で1次関数に等しい関数を**区分的1次多項式**と呼び、区分的1次多項式の全体を \tilde{X} と表す。 $\dim \tilde{X} = m + 1$ である。



試行関数 (近似解) \hat{u} , 試験関数 \hat{v} として、区分的1次多項式を採用しよう。言い換えると、試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} , 試験関数の空間 \hat{X} は、 $\hat{X}_{g_1} \subset \tilde{X}$, $\hat{X} \subset \tilde{X}$ を満たすよう定める。

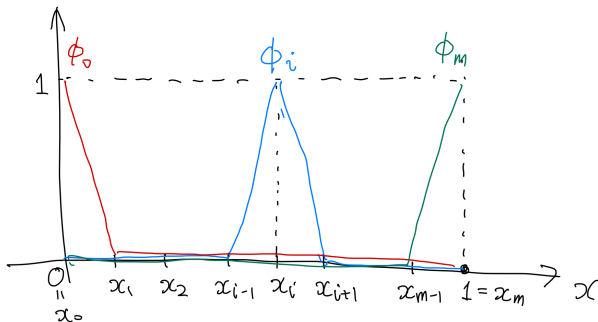
4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

\tilde{X} の基底関数として、以下に定義する $\{\phi_i\}_{i=0}^m$ を採用できる。

ϕ_i の定義

ϕ_i は区分的1次多項式で、 x_i では1, 他の節点 x_j ($j \neq i$) では0という値を取る:

- Ⓐ $\phi_i \in C[0, 1]$
- Ⓑ $(\forall k \in \{1, \dots, m\}) (\exists p, q \in \mathbb{R}) (\forall x \in e_k) \phi_i(x) = px + q$
- Ⓒ $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($j = 0, 1, \dots, m$).



4.2.2 区分的1次多項式の空間の基底関数

次の性質が基本的である。

補題 4.8 (基底関数 ϕ_i の性質)

$w_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq m$) に対して

$$\hat{w}(x) := \sum_{i=0}^m w_i \phi_i(x)$$

とおくと

$$\hat{w}(x_j) = w_j \quad (0 \leq j \leq m).$$

すなわち ϕ_j の係数 w_j は、節点 x_j における関数値である。

証明.

任意の $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して

$$\hat{w}(x_j) = \sum_{i=0}^m w_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=0}^m w_i \delta_{ij} = w_j \delta_{jj} = w_j.$$



4.2.3 有限要素空間, 有限要素解

試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} と試験関数の空間 \hat{X} として、次のものを採用する。

$$\hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{w} \in \tilde{X} \mid \hat{w}(0) = \alpha \right\}, \quad \hat{X} := \left\{ \hat{v} \in \tilde{X} \mid \hat{v}(0) = 0 \right\}.$$

基底関数を用いて表すと

$$(14) \quad \hat{X}_{g_1} = \left\{ \alpha\phi_0 + \sum_{i=1}^m a_i\phi_i \mid a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\},$$

$$(15) \quad \hat{X} = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i\phi_i \mid a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \right\}.$$

このとき定まる Ritz-Galerkin 解を \hat{u} とする。すなわち \hat{u} は

$$(16a) \quad \hat{u} \in \hat{X}_{g_1},$$

$$(16b) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + \beta\hat{v}(1) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

を満たす。この \hat{u} を区分的 1 次要素 (P1 要素) を用いた **有限要素解** と呼ぶ。

4.2.4 蛇足の話

(実は必要がないのだけれど) 式で書くと、 $1 \leq i \leq m-1$ に対しては

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x \in [x_i, x_{i+1}]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = 0$ に対しては

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & (x \in [x_0, x_1]) \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

$i = m$ に対しては

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & (x \in [x_{m-1}, x_m]) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このように式で書けるけれど、そうしてもほとんど使いみちがない。

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ を満たす連続な区分的 1 次関数ということと、グラフのイメージを覚えた方がよい。

参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 一, C 編, 岩波書店 (1960).