

# 応用数値解析特論 第3回

～Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (続き), Ritz-Galerkin 法～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2023/>

2023年4月25日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (続き)
  - Poisson 方程式の境界値問題の弱定式化 (続き)
  - 変分原理
    - 補題 3.4 の証明
- 3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法
  - Galerkin 法
    - $X_{g_1}$ ,  $X$  の有限次元近似
    - 問題  $(\widehat{W})$
    - 問題  $(\widehat{W}')$
    - 連立 1 次方程式の導出
    - 連立 1 次方程式の一意可解性
  - Ritz 法
    - 問題  $(\widehat{V}')$
  - 誤差最小の原理
  - 古典的 Ritz-Galerkin 法
  - 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法
- 4 参考文献

- Mac での FreeFem++ のインストールについて、概略を説明して、実演してみせる。
- 前回は、菊地 [1] の第 2 章「微分方程式と変分原理」の内容のうち、Poisson 方程式の境界値問題 (P) とその弱定式化 (W) を説明した。
- 変分問題 (V) を導入し、(W) と同値であることを説明する。
- [1] の第 3 章「Ritz-Galerkin 法」の内容の解説を始める。

## 2.3 弱定式化 (続き) 記号の導入と思い出し

記述の簡略化のために記号をいくつか定義しよう。

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad [u, v] := \int_{\Gamma_2} u(x)v(x) d\sigma,$$

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

これらを用いて、前回の授業で分かったことをまとめると、

### 定理 3.1 ((P) $\Rightarrow$ (W))

$u$  が境界値問題 (P) の解ならば、 $u$  は次の問題 (W) の解である。

問題 (W)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

- (W) の解を (P) の**弱解 (weak solution)**
- 問題 (P) に対して問題 (W) を設定することを**弱定式化 (weak formulation)**
- (1) を**弱形式 (weak form)**

と呼ぶ。

## 2.3 弱定式化 (続き) 記号の導入と思い出し

ほぼ逆の命題、すなわち次の定理が成り立つ。

定理 3.2 ((W) $_{+\alpha}$   $\Rightarrow$  (P))

$u$  が (W) の解で、かつ十分滑らかであれば (P) の解になる

**細かい注意**  $-\Delta u = f$  が成り立つとき、 $u$  が滑らかなほど、 $f$  も滑らかになる。これは当たり前だが、 $\Omega$  が十分滑らかであれば (直観的には  $\partial\Omega$  が滑らかな曲線ならば)、弱形式が成り立つとき、 $f$  が滑らかなほど、 $u$  も滑らかになることが証明できる。そういう場合は、定理の条件「なおかつ十分滑らかであれば」はチェックする必要がなくなる。**しかし**、有限要素法では、問題とする領域を三角形や四面体の合併領域で近似することが多く、そのような領域は十分滑らかとは言えないので、難しい問題が生じる場合がある。

## 2.4 変分原理

(「有限要素法と変分法は近縁である」と言ったことを説明する。… 昨年度ここをはしゃったが、年度末の修士論文審査会で変分法がらみの発表が3つもあって、反省した。)

任意の  $u \in X_{g_1}$  に対して

$$I[u] := \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u]$$

とおく。次のような変分問題 (すなわち汎関数  $I$  の最小問題) を考える。

**問題 (V)**

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.  $I[u] = \min_{w \in X_{g_1}} I[w]$ . ( $I: X_{g_1} \rightarrow \mathbb{R}$  の最小点を求めよ。)

### 定理 3.3 ((W) $\Leftrightarrow$ (V))

$u$  が (W) の解  $\Leftrightarrow u$  が (V) の解.

微分方程式の解が、変分問題の解になるとき、**変分原理**が成り立つという。平凡社「世界大百科事典」によると、「一般的に、物理的な現象を法則として述べるのに関与するある基本スカラー量があって、これを最小にするという条件から法則が導かれる場合、この法則の記述の仕方を変分原理と呼んでいる。」

## 2.4 変分原理

定理 3.3 の証明のための準備として、一つ公式を導いておく。

### 補題 3.4

$u \in X_{g_1}$ ,  $v \in X$  とするとき、任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して

$$I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t\{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

特に ( $t = 1$  として)

$$I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

証明は単純な計算である (ある種の内積計算, 二次関数の整理) ので、授業では認めることにする (少し後のスライドに書いておく)。

## 2.4 変分原理 定理 3.3 の証明 (1)

### 定理 3.3 の証明

( $\Leftarrow$ )  $u$  を  $(V)$  の解とし、任意の  $v \in X$  を取る。任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに  $u + tv \in X_{g_1}$ . それゆえ

$$f(t) := I[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

が定義されるが、仮定よりこれは  $t = 0$  で最小値を取る。補題 3.4 により

$$f(t) = I[u + tv] = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + t\{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\} + I[u].$$

この 2 次関数が  $t = 0$  で最小となるには、1 次項の係数が 0 でなければならない:

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0.$$

これは弱形式 (1) に他ならない。ゆえに  $u$  は問題  $(W)$  の解である。



## 2.4 変分原理 定理 3.3 の証明 (2)

( $\Rightarrow$ )  $u$  が  $(W)$  の解とする。任意の  $w \in X_{g_1}$  に対して、 $v := w - u$  とおくと

$$v = w - u = g_1 - g_1 = 0 \quad (\text{on } \Gamma_1).$$

ゆえに  $v \in X$ . 補題 3.4 により

$$I[w] - I[u] = I[u + v] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \{\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v]\}.$$

$u$  が弱形式 (1) を満たすという仮定から  $\{\cdot\} = 0$  となることに注意すると

$$I[w] - I[u] = \frac{1}{2} \|v\|^2 = \frac{1}{2} \|w - u\|^2 \geq 0.$$

ゆえに  $I[u]$  は  $I$  の最小値である。すなわち  $u$  は問題 (V) の解である。  $\square$

## 2.4 変分原理

(ここは授業ではカットかな？余談だし。ちょろっとしゃべるくらいか。)

### 余談 3.5

要は 2 次関数  $I[u]$  の最小化である。 $I$  の定義域は無次元の空間であるが、そのような汎関数に対しても、(普通の微分を拡張した) Fréchet 微分というものが定義される。実は、 $I$  の Fréchet 微分は

$$I'[u] = \langle u, \cdot \rangle - (f, \cdot) - [g_2, \cdot].$$

(Cf.  $i(u) = \frac{1}{2}u^2 - fu - g_2u$  のとき、 $i'(u) = u - f - g_2$ )

そして、 $I'[u] = 0$  は

$$\langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] = 0 \quad (v \in X)$$

となる。つまり、

**弱形式は、変分問題の汎関数の Fréchet 微分係数 = 0 という条件**

である。



## 2.4.1 補題 3.4 の証明

$u \in X_{g_1}$ ,  $v \in X$ ,  $t \in \mathbb{R}$  とするとき、 $\Gamma_1$  上で

$$u + tv = g_1 + t \cdot 0 = g_1$$

であるから  $u + tv \in X_{g_1}$ .

$$\begin{aligned} I[u + tv] &= \frac{1}{2} \|u + tv\|^2 - (f, u + tv) - [g_2, u + tv] \\ &= \frac{1}{2} \langle u + tv, u + tv \rangle - (f, u) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} (\|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + \|tv\|^2) - t(f, v) - [g_2, u] - t[g_2, v] \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - (f, u) - [g_2, u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2 \\ &= I[u] + t \{ \langle u, v \rangle - (f, v) - [g_2, v] \} + \frac{t^2}{2} \|v\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

### 3 Poisson 方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法

前回の講義で、Poisson 方程式の境界値問題を題材にして、弱定式化 (弱解の方法) を説明し、(最小型) 変分原理が成り立つことを確認した。

今回は、**同じ問題を題材に、Ritz-Galerkin 法** という近似解法を説明する。有限要素法は、Ritz-Galerkin 法の一つである、といえる。

先走って、もう少し詳しく説明すると次のようになる。

前節で解説した弱解の方法とは、微分方程式の境界値問題 (P) を考察するため、それを Euler-Lagrange 方程式とする変分問題 (V) やそれと同値な問題 (W) (弱形式で記述される) を導いて議論する、というものであった。

Ritz-Galerkin 法は、(V) や (W) を有限次元近似した問題 ( $\hat{V}$ ), ( $\hat{W}$ ) の解を、もとの問題 (P) の近似解に採用する、というものである。

変分問題の近似解法として、有名な <sup>レイリー</sup> Rayleigh などの研究 (“Theory of Sound” [2], [3]) もあったが、完成したのは Ritz である (**Ritz の方法**, Ritz [4])。

#### 余談 3.6

私が勉強しはじめの頃は、Rayleigh-Ritz の方法とか、Rayleigh のみの名前がついたりしていた。Rayleigh 卿 (John William Strutt, “third Baron Rayleigh”, “Lord Rayleigh”, 1842–1919) は長生きした大物理学者、Ritz (Walter Ritz, 1878–1909) は若くしてなくなったという事情もあって、Ritz の名前は軽んじられ、そしてそれが孫引きされていたような気配が感じられる。

## 3.1 Galerkin 法 3.1.1 $X_{g_1}$ , $X$ の有限次元近似

弱解の有限次元近似版として微分方程式の近似解を求めよう、というのが **Galerkin 法** である。

いくつかの関数を選び、その 1 次結合で  $u$  や  $v$  の近似関数を作る。より具体的には関数空間  $X_{g_1}$ ,  $X$  の有限次元近似  $\hat{X}_{g_1}$ ,  $\hat{X}$  を作るため

$$(2) \quad \hat{g}_1 \doteq g_1 \quad \text{on } \Gamma_1$$

$$(3) \quad \psi_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

となる  $\hat{g}_1$  と、1 次独立な  $\psi_i \in X$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を適当に選び、

$$(4) \quad \hat{X}_{g_1} := \left\{ \hat{g}_1 + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

$$(5) \quad \hat{X} := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \mid (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

とおく。以下  $\{\psi_i\}$  のことを**基底関数** (basis functions) と呼ぶ。

## 3.1 Galerkin 法 3.1.2 問題 ( $\widehat{W}$ )

Poisson 方程式の境界値問題 (P) の解  $u$  を  $\widehat{X}_{g_1}$  の要素  $\widehat{u}$  で近似することを考える。弱形式 (W) を思い浮かべて、

問題 ( $\widehat{W}$ )

Find  $\widehat{u} \in \widehat{X}_{g_1}$  s.t.

$$(6) \quad \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle = (f, \widehat{v}) + [g_2, \widehat{v}] \quad (\widehat{v} \in \widehat{X}).$$

という問題を考える。

ちなみに、この分野の言葉遣いでは、 $\widehat{u}$  を**試行関数 (trial function)**,  $\widehat{v}$  を**試験関数 (test function)** と呼ぶ。

### 余談 3.7 (重み付き残差法)

ここでは試験関数の空間  $\widehat{X}$  として、試行関数の空間  $\widehat{X}_{g_1}$  とよく似たもの (ともに  $\psi_i$  で張られている) を採用したが、これは絶対必要というわけではない。実際に色々なものが使われている (もっとも、その場合は、Galerkin 法ではなく、**重み付き残差法 (method of weighted residuals, weighted residual methods)** と呼ばれることが多い)。この意味で Galerkin 法は、後で説明する Ritz 法よりも広い方法である、とすることが出来る。

2023/4/25 の授業はここまで説明しました。



## 3.1 Galerkin 法 3.1.3 問題 ( $\widehat{W}'$ )

問題 ( $\widehat{W}$ ) の方程式 (6) が  $\hat{v} \in \hat{X}$  につき線形で、 $\hat{X}$  が  $\{\psi\}_{i=1,2,\dots,m}$  で張られることから、( $\widehat{W}$ ) は、次の問題 ( $\widehat{W}'$ ) と同値であることが分かる。

問題 ( $\widehat{W}'$ )

Find  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  s.t.

$$(7) \quad \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

実際、 $\psi_i \in \hat{X}$  であるから、 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  が、(6) を満たすならば、(7) を満たす。逆に  $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  が (7) を満たすならば、任意の  $a_i$  をかけて  $i$  について加えることで

$$\sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{u}, \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) + \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i].$$

内積の線形性から

$$\left\langle \hat{u}, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right\rangle = \left( f, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right) + \left[ g_2, \sum_{i=1}^m a_i \psi_i \right].$$

これは (6) が成り立つことを意味する。

□

## 3.1 Galerkin 法 3.1.4 連立 1 次方程式の導出

方程式 (7) は、ある連立 1 次方程式と同値であることを示そう。 $\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  であるから、ある  $a_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) が存在して

$$\hat{u} = \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j$$

と表せる。これを (7) に代入すると

$$\left\langle \hat{g}_1 + \sum_{j=1}^m a_j \psi_j, \psi_i \right\rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

すなわち

$$(8) \quad \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = (f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

この (8) を行列とベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix}.$$

### 3.1.4 連立1次方程式の導出

ゆえに

$$(9) \quad \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

ただし、

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \psi_1, \psi_m \rangle & \cdots & \langle \psi_m, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle),$$

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a_i),$$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (f, \psi_1) + [g_2, \psi_1] - \langle \hat{g}_1, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ (f, \psi_m) + [g_2, \psi_m] - \langle \hat{g}_1, \psi_m \rangle \end{pmatrix} = ((f, \psi_i) + [g_2, \psi_i] - \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle).$$

$f, g_2, \hat{g}_1, \{\psi_i\}$  が与えられれば  $\mathbf{A}, \mathbf{f}$  は定まる。 $\mathbf{u}$  は未知ベクトルである。  
この連立1次方程式 (9) が解を持つかどうか、次の命題で一般的に解決する。

## 補題 3.8 (Galerkin 法の一意可解性)

$\Gamma_1 \neq \emptyset$  で、 $\{\psi_i\}$  は 1 次独立とする。このとき  $A$  は正値対称である。ゆえに連立 1 次方程式 (9) は一意可解である。

復習: 実対称行列  $A$  に対して、 $A$  が正値  $\stackrel{\text{def}}{=} A$  の固有値がすべて正 ( $\Leftrightarrow (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}) \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ ). 特に正値対称行列は正則である。

( $\{\psi_j\}$  を 1 次独立に取るのは、基底とするために当然である。一方、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  は、もとの問題の解の一意性のために必要であるから、これも自然な条件である。)

証明  $A$  の対称性 ( $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_i \rangle$ ) は明らかである。 $A$  の正値性を示す。任意の  $\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$  に対して

$$\hat{v} := \sum_{j=1}^m b_j \psi_j$$

とおくと、 $\psi_j$  の 1 次独立性から  $\hat{v} \neq \mathbf{0}$  であり、実は  $\|\hat{v}\| > 0$  である。

( $\because$  もしも  $\|\hat{v}\| = 0$  ならば、 $\|\cdot\|$  の定義から、 $\hat{v}$  は定数関数であるが、 $\Gamma_1 \neq \emptyset$  から、 $\hat{v}$  は少なくとも 1 点 ( $\Gamma_1$  の任意の点) で 0 に等しく、 $\hat{v} \equiv 0$  が導かれ、矛盾が生じる。)

## 3.1 Galerkin 法 3.1.5 連立 1 次方程式の一意可解性

ゆえに

$$0 < \|\hat{v}\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^m b_j \psi_j, \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_i \left( \sum_{j=1}^m \langle \psi_j, \psi_i \rangle b_j \right) = \mathbf{b}^\top \mathbf{A} \mathbf{b}$$

となる。従って  $A$  は正値である。 □

### 注意 3.9 (記号 $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$ )

ここで  $\mathbf{b}^\top$  は、縦ベクトル  $\mathbf{b}$  を転置して出来る横ベクトルである。ゆえに  $\mathbf{b}^\top \mathbf{a}$  は、ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  の内積に他ならない。この文書では、色々な内積が登場するので、それらを明確に区別するために、記号を使い分けている。同様に  $\mathbb{C}^m$  において、 $\mathbf{b}^* \mathbf{a}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積である。

10月10日の授業では、次の §3.2 は省略して、§3.3 を説明し、そこで時間切れとなりました。§3.4 以降は、次回の授業に回します。

## 3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 ( $\hat{V}$ )

変分問題の有限次元近似版の解を求め、それを元の問題の近似解として採用しよう、というのが **Ritz 法** である。具体的には次の問題を考える。

問題 ( $\hat{V}$ )

$$\text{Find } \hat{u} \in \hat{X}_{g_1} \text{ s.t. } I[\hat{u}] = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} I[\hat{w}].$$

前回証明した (W) と (V) の同値性と同様に、( $\hat{W}$ ) と ( $\hat{V}$ ) も同値である。つまり、今考えている Poisson 方程式の境界値問題 (のような対称性のある) 問題では、Galerkin 法と Ritz 法、それぞれによる近似解を定める連立 1 次方程式は同じものである。そこで、**Ritz-Galerkin 法** と呼ばれる。

## 3.2 Ritz 法 3.2.1 問題 ( $\hat{V}'$ )

ちなみに ( $\sum$  や係数を内積の外に出す、という方針で変形して)

$$\begin{aligned} I[\hat{u}] &= \frac{1}{2} \|\hat{g}_1\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \langle \psi_i, \psi_j \rangle - (f, \hat{g}_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m a_i (f, \psi_i) - [g_2, \hat{g}_1] - \sum_{i=1}^m a_i [g_2, \psi_i] \end{aligned}$$

となる。これから極値の条件は<sup>1</sup>

$$0 = \frac{\partial I[\hat{u}]}{\partial a_i} = \langle \hat{g}_1, \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^m a_j \langle \psi_j, \psi_i \rangle - (f, \psi_i) - [g_2, \psi_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

これは、もちろん Galerkin 法で得た (8) と同じである。

---

<sup>1</sup>  $\frac{\partial}{\partial a_i} a_j = \delta_{ij}$  に注意。一般に  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) とするとき、 $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + b$  となる。特に  $A$  が対称ならば  $\nabla f(x) = Ax + b$ 。1 変数の  $(\frac{1}{2}ax^2 + bx + c)'$  =  $ax + b$  の拡張。



やってみよう  $\nabla(\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c) = \frac{1}{2}(A^T + A)x + b$

微積分の授業などで聞いたことがあるかもしれないが、その覚えがなければ、多変数2次関数の微分をやってみることを勧める。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj}x_k x_j + \sum_{k=1}^n b_k x_k + c.\end{aligned}$$

これを  $x_i$  で偏微分すると？ (スライド PDF の末尾を見よ。)

## 3.3 誤差最小の原理

### 定理 3.10 (誤差最小の原理)

Ritz-Galerkin 解  $\hat{u}$  は  $\hat{X}_{g_1}$  の中で (ある意味で) 最も  $u$  に近い。すなわち

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}} \|\hat{w} - u\|.$$

(授業では、証明の前に、 $u$  から超平面  $\hat{X}_{g_1}$  への射影  $\hat{u}$  の図を板書する。)

### 3.3 誤差最小の原理

**証明** まず  $\hat{u}$  は、 $u$  から  $\hat{X}_{g_1}$  に下ろした垂線の足 (正射影) であることを示す。  
弱形式

$$\langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X),$$

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

から ( $\hat{X} \subset X$  に注意して)

$$\langle \hat{u} - u, \hat{v} \rangle = 0 \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

任意の  $\hat{w} \in \hat{X}_{g_1}$  に対して、 $\hat{u} - \hat{w} \in \hat{X}$  ゆえ、 $\hat{v}$  のところに  $\hat{u} - \hat{w}$  を代入して

$$(\hat{u} \text{ は垂線の足}) \quad \langle \hat{u} - u, \hat{u} - \hat{w} \rangle = 0.$$

ゆえにピタゴラスの定理の等式

$$\|\hat{w} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u} + \hat{u} - u\|^2 = \|\hat{w} - \hat{u}\|^2 + \|\hat{u} - u\|^2$$

が成り立つ。これから

$$\|\hat{u} - u\| \leq \|\hat{w} - u\|$$

を得る。

□

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

実際に問題を解くとき、 $\{\psi_j\}$  を適当に選ばなければならない。古典的な Ritz-Galerkin 法では、基底関数として、微分方程式の主要部の微分作用素の固有関数などを使用する。

### 例 3.11 (常微分方程式の境界値問題に対する Ritz-Galerkin 法)

次の常微分方程式 (1 次元 Poisson 方程式?) の境界値問題を考えよう。

$$(10) \quad \begin{cases} -u'' = f & (0 < x < 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで  $f$  は开区間  $(0, 1)$  上定義された既知関数である。

$\Omega = (0, 1)$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma_2 = \emptyset$ ,  $g_1 = 0$  である。

$\hat{g}_1 = 0$  とするのが自然である。 $\hat{X}_{g_1} = \hat{X} := \text{Span}\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  となる。

$$\psi_j(x) := \sin(j\pi x) \quad (1 \leq j \leq m)$$

とおくと  $\psi_j(0) = \psi_j(1) = 0$  すなわち  $\psi_j = 0$  on  $\Gamma_1$  ( $1 \leq j \leq m$ ) であり、1 次独立である (直交性から容易に証明できる)。

$\hat{u} \in \hat{X}_{g_1}$  は、次のように表せる。

$$(11) \quad \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m a_j \psi_j(x).$$

### 例 3.11 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

$\Gamma_2 = \emptyset$  であるから、 $[g_2, \cdot]$  という項は不要で、弱形式は

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X}).$$

さて

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = (\psi_j', \psi_i') = ij\pi^2 \int_0^1 \cos(j\pi x) \cos(i\pi x) dx = \frac{1}{2} ij\pi^2 \delta_{ij}$$

であるから

$$A = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle) = \frac{\pi^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & m^2 \end{pmatrix}.$$

これは対角行列であるから、逆行列は一目で

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/m^2 \end{pmatrix}.$$



## 例 3.11 (区間における Ritz-Galerkin 法 (続き))

以上を振り返って

- Fourier 級数に慣れていれば、(Ritz-Galerkin 法を知らなくても) (11), (12) を導くのは簡単である (やってみよう)。
- $\psi_j$  は、同次 Dirichlet 条件を課した微分作用素  $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$  の固有関数である。これは“対称な作用素”であるため、直交性

$$i \neq j \Rightarrow (\psi_i, \psi_j) = 0$$

が成り立つ。さらに

$$i \neq j \Rightarrow \langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$$

が成り立ち、係数行列  $A$  が対角行列となって、計算が簡単になっている。

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

以下は 2 次元バージョン。時間があれば (同じことだから)。

### 例 3.12 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

正方形領域  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  において、Poisson 方程式  $-\Delta u = f$  に同次 Dirichlet 境界条件を課した境界値問題を考える ( $\Gamma_1 = \Gamma$ ,  $g_1 = 0$  である)。このとき  $\{\psi_k\}$  として

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

を採用するのが便利である (ここで  $m \in \mathbb{N}$ )。弱形式は上の例と同様に

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) \quad (\hat{v} \in \hat{X} := \text{Span}\{\varphi_{ij}\}).$$

である。後のための準備として

$$\langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = \frac{\pi^2}{4} (ki + \ell j) \delta_{ki} \delta_{\ell j} \quad (1 \leq i, j, k, \ell \leq m)$$

さて

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \varphi_{k\ell}$$

とおくと、

と お き ま す



### 例 3.12 (正方形領域における Ritz-Galerkin 法)

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{u}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^m a_{k\ell} \langle \varphi_{k\ell}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\
 &\Leftrightarrow a_{ij} \langle \varphi_{ij}, \varphi_{ij} \rangle = (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m) \\
 &\Leftrightarrow a_{ij} = \frac{4}{\pi^2(i^2 + j^2)} (f, \varphi_{ij}) \quad (1 \leq i, j \leq m).
 \end{aligned}$$

例えば  $f \equiv 1$  (定数関数) である場合、

$$\begin{aligned}
 (f, \varphi_{ij}) &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi y) dx dy = \frac{[(-1)^{i+1} + 1] [(-1)^{j+1} + 1]}{ij\pi^2} \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{ij} & (i, j \text{ が共に奇数}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

ゆえに

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{16}{ij(i^2 + j^2)\pi^4} & (i, j = 1, 3, 5, 7, \dots). \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

## 3.4 古典的 Ritz-Galerkin 法

ここで古典的 Ritz-Galerkin 法の特徴を列挙しておこう。

- ① 基底関数として固有関数を使うため、適用範囲が狭い。
- ② Neumann 境界条件の処理が楽。

…以上は有限要素法のテキスト (菊地 [1]) に書いてあったことであるが、次のこともぜひ指摘しておきたい。

- ③ 適用できる問題に対して、少ない手間 (それこそ手計算) で、意外と高精度な解を得ることが出来る。

### 余談 3.13 (棒の固有値問題)

ずっと以前、私が勤め始めた頃、よその研究室の学生が加藤 [5] の中の例題 (棒の振動の固有値問題) を数値計算することを卒業研究のテーマとして与えられて、それに付き合ったことがある。そのときの記録。

「I 君の固有値問題」 (1992/11)

そんな古くさい問題、差分法を使って、コンピューターで解けば楽勝だと未熟な桂田センセイは思ったが、古典的な Ritz-Galerkin 法は優秀で、ましてそれを Mathematica に載せると…という話。ずっと後になって、その 2 次元版 (板の固有値問題) に関わるとは…

## 3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

ようやく次回から有限要素法の話に突入する。

有限要素法は、次のような特徴を持つ Ritz-Galerkin 法である。

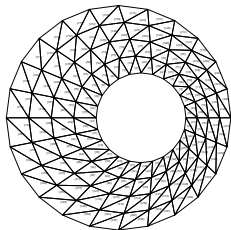
- 領域を

- 1次元の場合 区間

- 2次元の場合 三角形, 四角形

- 3次元の場合 三角錐, 四面体

などの簡単な図形 — 有限要素 (finite element) と呼ぶ — に分割する:



$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^m e_k \quad (e_k \text{ は有限要素}).$$

## 3.5 新しい Ritz-Galerkin 法としての有限要素法

- 連続な区分的多項式 ( $\hat{\Omega}$  で連続、各有限要素上で多項式に等しいもの) を基底関数に採用する。

ただし、次の図 1 のように、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。各三角形を (有限) 要素とよぶ。

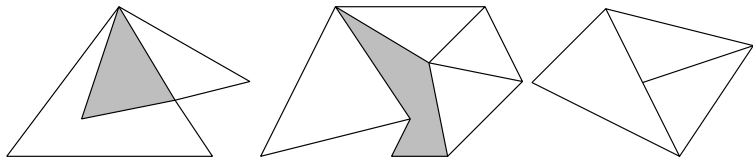


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

(有限要素というときは、試行関数、試験関数として、どういう近似関数を用いるかで考える場合がある。その辺の区別について言及すべきかも。)

# やってみよう の解答

$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} x_k \cdot x_j + x_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}$  であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_j) + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_i} x_k + \frac{\partial}{\partial x_i} c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} (\delta_{ik} x_j + x_k \delta_{ij}) + \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} + \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{ij} \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k \right) + b_i \\ &= \frac{1}{2} \left( Ax \text{ の第 } i \text{ 成分} + A^\top x \text{ の第 } i \text{ 成分} \right) + b \text{ の第 } i \text{ 成分} \\ &= \frac{1}{2} (A + A^\top)x + b \text{ の第 } i \text{ 成分}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\nabla \left( \frac{1}{2} (Ax, x) + (b, x) + c \right) = \frac{1}{2} (A + A^\top)x + b.$$

# 参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 1*, London, Macmillan and co. (1877).
- [3] John William Strutt (third baron Rayleigh), : *The Theory of Sound, volume 2*, London, Macmillan and co. (1878).
- [4] Walter Ritz, von : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, *Annalen der Physik Volume 333, Issue 4*, pp. 737–786, (1909), Ritz の方法が述べられている記念碑的な論文.
- [5] 加藤敏夫：変分法, 寺沢貫一（編）, 自然科学者のための数学概論 — 応用編 —, C 編, 岩波書店 (1960).