

応用数値解析特論 第5回

～2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2022/>

2022年10月24日

目次

① 本日の内容

② 2次元の有限要素法

- 三角形要素への分割と区分的1次多項式
- 三角形 e 上の1次関数 L_i と $(L_j, L_i)_e, \langle L_j, L_i \rangle_e$
 - 三角形の面積
 - 三角形要素の面積座標 L_i
 - 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$
 - $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$
- 要素係数行列の計算
- 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

③ 参考文献

- 2次元 Poisson 方程式に対する有限要素法 (菊地 [1] の4章):
大筋は前回の1次元 Poisson 方程式と同様である。
 - 三角形要素上の1次関数を重み座標 L_i を導入する。
 - 要素係数行列, 要素自由項ベクトルの公式が求まる。
 - 2次元でも直接剛性法が出来る。やや技巧的な部分もあるが、学ぶ価値がある。
- コーディングの詳細は次回に回す。

5 2次元の有限要素法

第2回の授業で扱った Poisson 方程式の境界値問題を題材に、2次元領域における有限要素法を説明する (菊地 [1] 第5章)。

(思い出す) Ω は \mathbb{R}^2 の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1, Γ_2 は条件

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、次の Poisson 方程式の境界値問題を考える。

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ (2) \quad & u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ (3) \quad & \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2, \end{aligned}$$

ここで \mathbf{n} は Γ の外向き単位法線ベクトルを表す。

大筋は1次元の場合と同様だが、(i) 各要素内の計算に面積座標を使うところと、(ii) 直接剛性法が2次元でも実現可能であることを理解するところが要点となる。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し、 $\bar{\Omega}$ を三角形 e_k ($1 \leq k \leq N_e$) に分割する:

$$\bar{\Omega} \doteq \hat{\Omega} := \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k.$$

ただし、重なりや、すき間、頂点が他の三角形の辺上にあることは避けることにする。

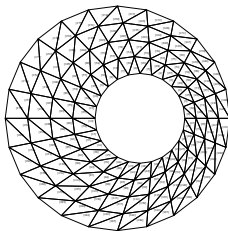


図 1: 二つの円で囲まれた閉領域 $\bar{\Omega}$ を三角形の合併で近似する

Ω が多角形でない限り、境界は「曲がっている」。 $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k$ は期待できない。

各三角形を **三角形 (有限) 要素** とよぶ。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

N_e は要素の総数 (the number of elements) で、プログラムでは NELMT のような名前の変数で記憶されることが多い。

有限要素の頂点を **節点** (node) と呼び、 $\{P_i\}_{i=1}^m$ のように番号をつけておく。

m は節点の総数 (the number of nodes) で、プログラムでは NNODE のような名前の変数で記憶されることが多い。

注意 1次元の場合、節点の個数 = 要素の個数 + 1 という簡単な関係が成立していた。(区間を m 等分したとき、 m を用いて、要素を e_k ($1 \leq k \leq m$), 節点を x_k ($0 \leq k \leq m$) と番号づけることが出来た。) 2次元の場合は、そのような関係はない。

5.1 三角形要素への分割と区分的1次多項式

$\hat{\Omega}$ 上連続で、各有限要素 e_k 上で x と y の1次多項式関数に等しいものを、**区分的1次多項式**と呼び、その全体を \tilde{X} で表わす (\tilde{X} はここだけの記号)。

$\{e_k\}_{k=1}^{N_e}$ と \tilde{X} の対を**区分的1次有限要素** (piecewise linear finite element) と呼ぶ。

2変数の1次関数 $z = a + bx + cy$ のグラフは平面であるから、 \tilde{X} のグラフは、空間内の三角形を連続につなげた“折れ面”である。

試行関数の空間 \hat{X}_{g_1} , 試験関数の空間 \hat{X} は次のように選ぶ。

$$(4) \quad \hat{X}_{g_1} = \left\{ \hat{w} \in \tilde{X} \mid \hat{w} = \hat{g}_1 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}, \quad \hat{X} = \left\{ \hat{v} \in \tilde{X} \mid \hat{v} = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \right\}.$$

(\hat{g}_1 は g_1 に近い計算しやすい関数)

\tilde{X} の基底関数 $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ は

$$(5a) \quad \phi_i \in \tilde{X} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(5b) \quad \phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

満たすものを採用する (この条件で一意に確定し、線形独立であることに注意)。

5.2 三角形 e 上の 1 次関数 L_i と $(L_j, L_i)_e, \langle L_j, L_i \rangle_e$

5.2.1 三角形の面積

平面上の三角形要素 e を考える (本来は、以下の N_i, L_i も含めて、要素によるので、 e_k, N_i^k, L_i^k のように書いた方が良くもしいかもしれないが、うっとうしいので k は略する)。

e に属する節点を、反時計まわりに $N_i = (x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2$) とする。

後でしばしば必要になるので、 e の面積 $|e|$ を計算しておこう。

$$\begin{aligned} |e| &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)]. \end{aligned}$$

1 次多項式全体を P^1 と表す:

$$P^1 := \{ \hat{u} \mid (\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \hat{u}(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \}.$$

任意の $\hat{u} \in P^1$ は、3 節点 N_i における値 $u^i := \hat{u}(N_i)$ ($i = 0, 1, 2$) を指定すれば定まる ($u_i = \hat{u}(P_i)$ と混同しないように上に添字をつけた)。これは、直観的に明らかであるが (平面は、その上にある 3 点 (ただし同一直線上にはないとする) を指定すれば定まる)、すぐ後で証明する。

5.2.2 三角形要素の面積座標 L_i

節点 N_i で 1, 他の節点で 0 となる 1 次関数を L_i とする ($i = 0, 1, 2$)。つまり

$$(6a) \quad L_i \in P^1,$$

$$(6b) \quad L_i(N_j) = L_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (j = 0, 1, 2).$$

(L_0, L_1, L_2) は P^1 の基底になる。実際、1 次独立性はすぐ分かり、 $\dim P^1 = 3$ であるから、任意の $\hat{u} \in P^1$ は、

$$(7) \quad \hat{u}(x, y) = \sum_{i=0}^2 u^i L_i(x, y) \quad ((x, y) \in e)$$

と表される。

任意の $P \in e$ に対して、3 実数 $(L_0(P), L_1(P), L_2(P))$ を P の面積座標 (area coordinate) あるいは重心座標 (barycentric coordinate) と呼ぶ。(色々裏があるけれど今回は駆け足で進む。)

任意の $P \in e$ に対して次式が成り立つ。

$$L_0(P) + L_1(P) + L_2(P) = 1.$$

(P^1 の基底としては 3 つ必要だが、座標としては 2 つで十分ということになる。)

以下、 L_i のグラフの鳥瞰図と等高線を描こう。

Mathematica のコード例と実行結果

```
xs = {0, 3, 1}; ys = {0, 1, 2};  
{a, b, c} = Inverse[Transpose[{{1, 1, 1}, xs, ys}]];  
L[i_, x_, y_] := a[[i]] + b[[i]]*x + c[[i]]*y  
xmin = Min[xs]; xmax = Max[xs]; ymin = Min[ys]; ymax = Max[ys];  
gbase = RegionPlot[L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0,  
                  {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]  
gb=Table[Plot3D[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},  
              RegionFunction -> Function[{x, y, z},  
              L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]  
gc=Table[ContourPlot[L[i, x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},  
              RegionFunction -> Function[{x, y, z},  
              L[1, x, y] > 0 && L[2, x, y] > 0 && L[3, x, y] > 0]], {i, 3}]
```

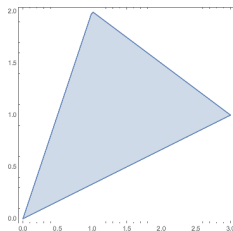


図 2: 三角形要素

ターミナルで入手して開く

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana/20221024.nb  
open 20221024.nb
```

Mathematica のコード例と実行結果

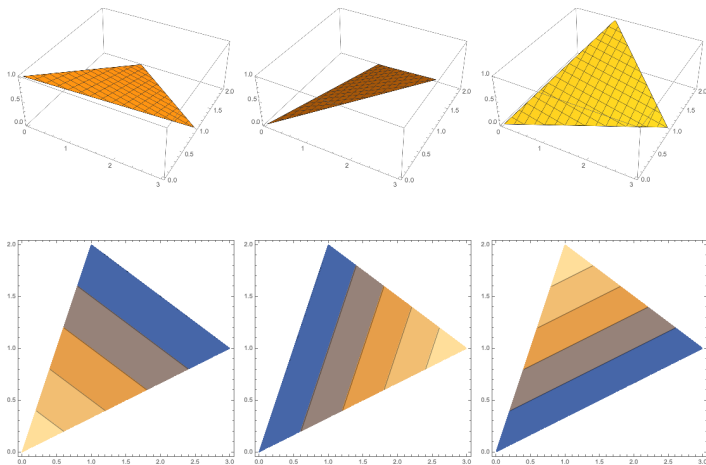


図 3: 左から L_0 , L_1 , L_2 の鳥瞰図と等高線

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

面積座標の積の積分については、便利な公式がある。

0 以上の任意の整数 i, j, k に対して

$$(8) \quad \iint_e L_0(x, y)^i L_1(x, y)^j L_2(x, y)^k dx dy = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}.$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

証明 $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ で囲まれる三角形を Δ とし、1 次関数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(P_0) = N_0, \quad \varphi(P_1) = N_1, \quad \varphi(P_2) = N_2$$

で定める。このとき

$$\varphi(\Delta) = e,$$

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = 2|e|.$$

ゆえに変数変換 $(x, y) = \varphi(u, v)$ を行なうと

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= \iint_{\Delta} L_0(\varphi(u, v))^i L_1(\varphi(u, v))^j L_2(\varphi(u, v))^k |\det \varphi'(u, v)| du dv. \\ &= 2|e| \iint_{\Delta} L_0(\varphi(u, v))^i L_1(\varphi(u, v))^j L_2(\varphi(u, v))^k du dv. \end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$L_i(\varphi(u, v))$ は (1 次関数と 1 次関数の合成であるから)、 u, v についての 1 次関数で、

$$L_i(N_j) = L_i(\varphi(P_j)) = \delta_{ij}$$

を満たすことから

$$L_0(\varphi(u, v)) = 1 - u - v, \quad L_1(\varphi(u, v)) = u, \quad L_2(\varphi(u, v)) = v$$

(各等式の両辺は 1 次関数で、 N_j での値が一致するから、全体で一致する)。

ゆえに

$$\begin{aligned} \iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \iint_{\Delta} (1-u-v)^i u^j v^k du dv \\ &= 2|e| \int_0^1 u^j \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv \right) du. \end{aligned}$$

右辺の内側の積分で、 $v = (1-u)t$ ($0 \leq t \leq 1$) と変数変換すると

$$dv = (1-u)dt, \quad (1-u-v)^i = ((1-u) - (1-u)t)^i = (1-u)^i (1-t)^i$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{1-u} (1-u-v)^i v^k dv &= \int_0^1 (1-u)^i (1-t)^i (1-u)^k t^k \cdot (1-u) dt \\ &= (1-u)^{i+k+1} \int_0^1 (1-t)^i t^k dt. \end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

ゆえに

$$\begin{aligned}\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \int_0^1 (1-u)^{i+k+1} u^j du \int_0^1 (1-t)^i t^k dt \\ &= 2|e| B(i+k+2, j+1) B(i+1, k+1).\end{aligned}$$

ただし B は次式で定義されるベータ関数である:

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt \quad (p, q > 0).$$

このベータ関数と、ガンマ関数

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

について、次の有名な公式が成り立つ (証明は例えば桂田 [2] § E.2 の 命題 E.2.4)。

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\iint_e L_0^i L_1^j L_2^k dx dy &= 2|e| \frac{\Gamma(i+k+2)\Gamma(j+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} \cdot \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+k+2)} \\ &= 2|e| \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+j+k+3)} = 2|e| \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!}. \quad \square\end{aligned}$$

5.2.3 面積座標の積の積分と $(L_j, L_i)_e$

$i = j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k, ℓ とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^2 L_k^0 L_\ell^0 dx dy = 2 |e| \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} = \frac{1}{6} |e|.$$

$i \neq j$ の場合、それ以外の添字 ($\in \{0, 1, 2\}$) を k とすると

$$(L_j, L_i)_e = \iint_e L_i^1 L_j^1 L_k^0 dx dy = 2 |e| \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{1}{12} |e|.$$

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

$$L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$$

とおくと

$$\delta_{ij} = L_j(x_i, y_i) = a_j + b_j x_i + c_j y_i = (1 \ x_i \ y_i) \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$$

であるから

$$(\heartsuit) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 2|e| > 0.$$

ゆえに A は逆行列を持つ。

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

(♡) から

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Cramer の公式によって

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \\ -(x_0 y_2 - y_0 x_2) & y_2 - y_0 & -(x_2 - x_0) \\ x_0 y_1 - y_0 x_1 & -(y_1 - y_0) & x_1 - x_0 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_1 y_2 - y_1 x_2 & x_2 y_0 - y_2 x_0 & x_0 y_1 - y_0 x_1 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_0 & y_0 - y_1 \\ x_2 - x_1 & x_0 - x_2 & x_1 - x_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.2.4 $L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$ の係数決定と $\langle L_j, L_i \rangle_e$

A^{-1} の下 2 行 b_k, c_k ($k = 0, 1, 2$) が得られれば、 $\langle L_j, L_i \rangle_e$ が計算できる:

$$(9) \quad \begin{aligned} \langle L_j, L_i \rangle_e &= \iint_e \nabla L_j \cdot \nabla L_i \, dx \, dy = \iint_e \begin{pmatrix} b_j \\ c_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} \, dx \, dy \\ &= (b_j b_i + c_j c_i) |e|. \end{aligned}$$

5.3 要素係数行列の計算

「積分は積分範囲を分割して計算し、後から和を取ればよい」ので、弱形式

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (f, \hat{v}) + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

は

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{N_e} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{k=1}^{N_e} (f, \hat{v})_{e_k} + [g_2, \hat{v}] \quad (\hat{v} \in \hat{X})$$

となる。ただし

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} := \int_{e_k} \nabla \hat{u}(x) \cdot \nabla \hat{v}(x) dx, \quad (f, \hat{v})_{e_k} := \int_{e_k} f(x) \hat{v}(x) dx, \quad [g_2, \hat{v}] := \int_{\Gamma_2} g_2 \hat{v} d\sigma.$$

そこで $u^j := \hat{u}(N_j)$, $v^j := \hat{v}(N_j)$ ($j = 0, 1, 2$) を用いて、

$$\hat{u} = \sum_{j=0}^2 u^j L_j, \quad \hat{v} = \sum_{i=0}^2 v^i L_i \quad (e_k \text{ 上})$$

と表すと

$$(11) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^2 v^i A_{ij}^{(k)} u^j, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \sum_{i=0}^2 v^i f_i^{(k)},$$

ただし

$$(12) \quad A_{ij}^{(k)} := \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}, \quad f_i^{(k)} := (f, L_i)_{e_k}.$$

5.3 要素係数行列の計算

そこで

$$(13a) \quad \mathbf{u}_k := \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_k := \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_k := \begin{pmatrix} f_0^{(k)} \\ f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$(13b) \quad A_k := \begin{pmatrix} A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおくと、 A_k は対称行列で、

$$(14) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^T A_k \mathbf{u}_k, \quad (f, \hat{v})_{e_k} = \mathbf{v}_k^T \mathbf{f}_k.$$

(線積分 $[g_2, \hat{v}]$ については、今回の授業では説明を省略する。とりあえず $g_2 = 0$ と考えて授業を聴いて下さい。桂田 [3] には書いてある。)

$A_{ij}^{(k)} = \langle L_j, L_i \rangle_{e_k}$ の計算は (9) で済んでいる。

5.3 要素係数行列の計算 具体的な成分の計算

$f_i^{(k)} = (f, L_i)_{e_k}$ については、例えば L_i を 1 次関数補間して

$$(f, L_i)_{e_k} \doteq \left(\sum_{j=0}^2 f(N_j) L_j, L_i \right)_{e_k} = \sum_{j=0}^2 f(N_j) (L_j, L_i)_{e_k}.$$

のように近似すれば

$$(L_j, L_i)_{e_k} = \begin{cases} |e_k|/6 & (i = j \text{ のとき}), \\ |e_k|/12 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

であるから

$$f_0^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (2f(N_0) + f(N_1) + f(N_2)),$$

$$f_1^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + 2f(N_1) + f(N_2)),$$

$$f_2^{(k)} \doteq \frac{|e_k|}{12} (f(N_0) + f(N_1) + 2f(N_2)).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$u_i := \hat{u}(P_i)$, $v_i := \hat{v}(P_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) として、

$$(15) \quad \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

とおく。

有限要素 e_k ($k = 1, 2, \dots, N_e$) の節点 N_0, N_1, N_2 に対して、

$$N_0 = P_{i_{k,0}}, \quad N_1 = P_{i_{k,1}}, \quad N_2 = P_{i_{k,2}}$$

となる整数 $i_{k,0}, i_{k,1}, i_{k,2}$ を取る (これらを**全体節点番号**と呼ぶ)。

$\mathbf{f}_k^* \in \mathbb{R}^m$ を $i_{k,0}$ 成分 = $f_0^{(k)}$, $i_{k,1}$ 成分 = $f_1^{(k)}$, $i_{k,2}$ 成分 = $f_2^{(k)}$ で、それ以外の成分はすべて 0 であるようなベクトルとする。例えば $i_0^{(k)} < i_1^{(k)} < i_2^{(k)}$ ならば

$$\mathbf{f}_k^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & f_0^{(k)} & 0 & \dots & 0 & f_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & f_2^{(k)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^\top.$$

このように \mathbf{f}_k^* を定義すると、次が成り立つ。

$$(16) \quad (\mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}})_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{f}_k = \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

同様の考え方で、行列 $A_k^* = (a_{ij}^{(k)})$ を

$$\begin{aligned} a_{i_{k,0}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{00}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{01}^{(k)}, & a_{i_{k,0}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{02}^{(k)}, \\ a_{i_{k,1}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{10}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{11}^{(k)}, & a_{i_{k,1}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{12}^{(k)}, \\ a_{i_{k,2}i_{k,0}}^{(k)} &= A_{20}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,1}}^{(k)} &= A_{21}^{(k)}, & a_{i_{k,2}i_{k,2}}^{(k)} &= A_{22}^{(k)}, \\ && \text{それ以外} &= 0 \end{aligned}$$

で定める。例えば $i_{k,0} < i_{k,1} < i_{k,2}$ ならば

$$A_k^* = \begin{pmatrix} i_{k,0} & i_{k,1} & i_{k,2} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ A_{00}^{(k)} & A_{01}^{(k)} & A_{02}^{(k)} & \leftarrow i_{k,0} & \\ A_{10}^{(k)} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \leftarrow i_{k,1} & \\ A_{20}^{(k)} & A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \leftarrow i_{k,2} & \end{pmatrix} \quad (\text{書いてない成分は } 0).$$

これを用いると

$$(17) \quad \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{e_k} = \mathbf{v}_k^\top A_k \mathbf{u}_k = \mathbf{v}^\top A_k^* \mathbf{u} \quad (k = 1, 2, \dots, N_e).$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ゆえに弱形式 (10) は ($g_2 = 0$ と考えている)

$$\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{A}_k^* \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{f}_k^*$$

すなわち

$$\mathbf{v}^\top \left(\sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{A}_k^* \mathbf{u} - \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^* \right) = 0$$

と同値になる。

ゆえに

$$\mathbf{A}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{A}_k^*, \quad \mathbf{f}^* := \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{f}_k^*$$

とおけば

$$(18) \quad \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f}^*) = 0.$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ここで \mathbf{v} は

$$Y := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; v_i = 0 \quad (P_i \in \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

の任意の元であるから、(18) は次と同値である。

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} - \mathbf{f} \in Y^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m; w_i = 0 \quad (P_i \notin \Gamma_1 \text{ なる } i) \right\}$$

すなわち

$$(19) \quad \mathbf{A}^{**} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{**}.$$

ここで

$\mathbf{A}^{**} := \mathbf{A}^*$ の第 i 行 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた行列,
 $\mathbf{f}^{**} := \mathbf{f}^*$ の第 i 成分 ($P_i \in \Gamma_1$ なる i) を除いた縦ベクトル.

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

$$I := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq m\}, \quad I_1 := \{i \in I \mid P_i \in \Gamma_1\}$$

とおく (I_1 は Γ_1 上にある節点の節点番号全体の集合)。

条件

$$u_i = g_1(P_i) \quad (i \in I_1)$$

があるから、これを代入して u_i ($i \in I_1$) を消去できる。以下それを実行する。

A^{**} を列ベクトルで

$$A^{**} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_m)$$

のように表示すると、(19) は

$$(20) \quad \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**}.$$

左辺の $\sum_{i=1}^m$ を $\sum_{i \in I \setminus I_1} + \sum_{i \in I_1}$ と分解して、移項すると

$$\sum_{i \in I \setminus I_1} \mathbf{a}_i u_i = \mathbf{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \mathbf{a}_i u_i.$$

5.4 近似方程式の組み立て — 直接剛性法

ゆえに

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f},$$

ただし

$\mathbf{u}^* := \mathbf{u}$ の第 i 成分 ($i \in I_1$) を除いた縦ベクトル,

$A := A^{**}$ の第 i 列 ($i \in I_1$) を除いた正方行列,

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}^{**} - \sum_{i \in I_1} \mathbf{a}_i u_i.$$

実際にプログラムを作成するとき、 A や \mathbf{f} が容易に求められることは次回解説する。

参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf> (2008).
- [3] 桂田祐史：ポアソン方程式に対する有限要素法, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/members/fem.pdf> (2001~). これは菊地 [1] の読書ノートの性格が強いので、一般公開はしていません。