微分方程式 演習 No.7 (2007年12月20日出題) 1/10 解答配布

2007年12月20日に配布した「非同次方程式の解法の解説補足」(`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/ode/hidouji/`) 中の問を演習して提出してもらった。その答合せ用である。

以下 C_1, C_2 は任意定数である (面倒なので、ここで一回だけ断って済ませる)。

(i) $y''-3y'+2y=x+1$. $u=ax+b$ とおくと $u''-3u'+2u=2ax+(2b-3a)$. これが $x+1$ に等しくなるには、$2a=1$, $2b-3a=1$. これから $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{4}$. ゆえに $u=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$. 一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$.

(ii) $y''+y'=x+1$. $u=x(ax+b)$ とおくと、$u''+u'=2ax+(2a+b)$. これが $x+1$ に等しくなるには、$2a=1$, $2a+b=1$. これから $a=\dfrac{1}{2}$, $b=0$. ゆえに $u=\dfrac{1}{2}x^2$. 一般解は $y=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2$.

(iii) $y''=x+1$. $u=x^2(ax+b)$ とおくと、$u''=6ax+2b$. これが $x+1$ に等しくなるには、$6a=1$, $2b=1$. これから $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{2}$. ゆえに $u=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2$. 一般解は $y=C_1x+C_2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2$. (授業でも説明したが、微分方程式を直接2回積分しても求まる。)

(iv) $y''-3y'+2y=e^{-x}$. $u=Ae^{-x}$ とおくと、$u''-3u'+2u=6Ae^{-x}$. これが e^{-x} に等しくなるには、$A=\dfrac{1}{6}$. ゆえに $u=\dfrac{1}{6}e^{-x}$. 一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{6}e^{-x}$.

(v) $y''+3y'+2y=e^{-x}$. $u=Axe^{-x}$ とおくと、$u''+3u'+2u=Ae^{-x}$. これが e^{-x} に等しくなるには、$A=1$. ゆえに $u=xe^{-x}$. 一般解は $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+xe^{-x}$.

(vi) $y''+2y'+y=e^{-x}$. $u=Ax^2e^{-x}$ とおくと、$u''+2u'+u=2Ae^{-x}$. これが e^{-x} に等しくなるには、$A=\dfrac{1}{2}$. ゆえに $u=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$. 一般解は $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.

(vii) $y''-3y'+2y=\cos x$. $u=A\cos x+B\sin x$ とおくと、$u''-3u'+2u=(A-3B)\cos x+(3A+B)\sin x$. これが $\cos x$ に等しくなるには、$A-3B=1$, $3A+B=0$. これから $A=\dfrac{1}{10}$, $B=-\dfrac{3}{10}$. ゆえに $u=\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{3}{10}\sin x$. 一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{3}{10}\sin x$.

(viii) $y''+y=\cos x$. $u=x(A\cos x+B\sin x)$ とおくと、$u''+u=2B\cos x-2A\sin x$. これが $\cos x$ に等しくなるには、$B=\dfrac{1}{2}$, $A=0$. ゆえに $u=\dfrac{1}{2}x\sin x$. 一般解は $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x$.

試験について 非同次方程式の特解を求める問題を期末試験に出す場合、重根になっていないもの (ここで言うと (i), (iv), (vii)) と重根になっているもの (ここで言うと (ii), (iii), (v), (vi), (viii)) の2つを出題するつもり。

余談 非同次方程式の特解を求めるには、ここでやった未定係数法以外に、(a) 演算子法、(b) Laplace 変換を用いる方法、(c) グリーン関数を用いる方法などがある。将来、Laplace 変換を学ぶことになったら (b) をお勧めする (見通しがよい)。手元のコンピューターで数式処理が出来る場合は (c) をお勧めする (コンピューターに積分させるだけなので簡単)。(c) については、「$y''+py'+qy=f(x)$ の初期値問題の Green 関数」[1] を見よ。

[1] `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/ode/green/`