微分方程式 演習 No.6 (2007 年 12 月 6 日出題) 12/13 解説

問　教科書 p.154 **5.5** 問 2 を解け。

基本線は演習 No.5 と同じで、与えられた微分方程式の特性方程式を作って、それを解き、根の判別をして (重根、実根、虚根？)、pp.153–154 の説明に従って一般解を書き下すだけである。

微分方程式の階数が 3, 4 なので、特性方程式が 3, 4 次方程式になるが、高校数学の範囲 (代入して成り立つかどうかで解を探して、因数定理を使って⋯) で解けるようなものにしてあるので大丈夫のはず。

上で「pp.153–154 の説明」と書いたが、少し違ったまとめ方をしてみよう (これは 12 月 13 日の授業で喋った)。最初の要点は、

> α が特性方程式の k 重根ならば (重根でない根の場合は $k = 1$ とする)、一般解の式に $C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x} + C_3x^2e^{\alpha x}\cdots + C_kx^{k-1}e^{\alpha x}$ というものが現れる。

というものである。虚数の指数関数を使っても構わないならば、これで OK, となる (教科書の p.154 の上半分に書いてあること)。

α が虚数で、「虚数の指数関数を使わないで書こう」という場合は、もう一仕事必要になる。まず

> 実係数の方程式では、$\alpha = a+ib$ (a, b は実数, $b \neq 0$) がちょうど k 重根ならば、$\overline{\alpha} = a-ib$ (a, b は実数, $b \neq 0$) もちょうど k 重根である

ということに注意する。

そして次の事実が重要である。

> ☆
>
> $$\{C_1e^{(a+ib)x} + C_2e^{(a-ib)x}; C_1, C_2 \in \mathbf{C}\} = \{Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx; A, B \in \mathbf{C}\}.$$
>
> (ここで $\mathbf{C}$ は複素数全体の集合を表す。)

例えば $\alpha = 1+2i$ がちょうど 2 重根である場合、$\overline{\alpha} = 1-2i$ もちょうど 2 重根なのでこれら 4 つの根に対応して、一般解の式には

$$C_1e^{(1+2i)x} + C_2xe^{(1+2i)x} + C_3e^{(1-2i)x} + C_4xe^{(1-2i)x} \quad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ は任意定数})$$

というのが現れることが分かる。

ここで上に述べた事実☆を使うと、$C_1e^{(1+2i)x}+C_3e^{(1-2i)x}$ は $Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x$ に (ただし A, B は任意定数)、$C_2xe^{(1+2i)x}+C_4xe^{(1-2i)x} = x\left(C_2e^{(1+2i)x} + C_4e^{(1-2i)x}\right)$ は、$x(De^x\cos 2x+Ee^x\sin 2x)$ に (ただし D, E は任意定数) に書き換えられることが分かる。まとめると

$$C_1e^{(1+2i)x}+C_2xe^{(1+2i)x}+C_3e^{(1-2i)x}+C_4xe^{(1-2i)x} = Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x+x(De^x\cos 2x+Ee^x\sin 2x).$$