微分方程式 演習 No.5 (2007 年 11 月 29 日出題) 12/6 解説, 1/10 配布。

問　教科書 p.154 **5.5** 問 1 を解け。

基本的に、与えられた微分方程式の特性方程式を作って (これは 2 次方程式になる)、それを解き、根の判別をして (重根、実根、虚根？)、p.152 の「**まとめ**」に従って一般解を書き下すだけである。教科書の問でもあるので、詳しい解答は省略する。

問の (4) は一番面倒なので説明しておく (本当は (7), (8) の後に配置すべき問題かもしれない)。

$y'' + ay' + k^2 y = 0$ の特性方程式は $\lambda^2 + a\lambda + k^2 = 0$ で、特性根は

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4k^2}}{2}.$$

文字式なので、重根かそうでないかは、場合分けしないと定まらない。$a^2 - 4k^2 = 0$ のときは重根 $\lambda = -\dfrac{a}{2}$ なので、(微分方程式の) 一般解は

$$y = C_1 e^{-ax/2} + C_2 x e^{-ax/2}.$$

$a^2 - 4k^2 \neq 0$ のときは重根でないので、一般解は

$$y = C_1 \exp\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4k^2}}{2} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4k^2}}{2} x\right).$$

本当は $a^2 - 4k^2 < 0$ の場合は、cos, sin を使って

$$y = C_1 e^{-ax/2} \cos \frac{\sqrt{4k^2 - a^2}}{2} x + C_2 e^{-ax/2} \sin \frac{\sqrt{4k^2 - a^2}}{2} x.$$

と書く方が良いかも知れないが、教科書の解答はさぼってある。まあ、問題の方にも「虚数の指数関数は使わないで」という断り書きはないし。

参考　余白が空いたので、参考情報を。

- この授業のための WWW ページ (`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/ode/`) があります。授業中に配ったプリント (教科書の正誤表を含む)、演習問題は何だったか、いつの授業で何をしたか、などが載っています。
- 期末試験は、1 月 24 日 (木曜)16:00〜に行われるはずです (公式の情報で確認して下さい)。
- 桂田の研究室は、理工学部 6 号館 7 階, 6716B です。結構忙しいので、質問のために捕まえるには、事前にメール (`mk@math.meiji.ac.jp`) で連絡することを勧めます。