微分方程式 演習 No.4 (2007 年 11 月 8 日出題) 11/15 解説

教科書 p.138 **5.3** 問 1 の (2), (5), (8), (11), (14) を解け。

(2) まず $y' + ay = 0$ を解く。$\dfrac{dy}{dx} = -ay$. これから $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int a\ dx$. 積分を実行して、$\log|y| = -ax + C$ (C は積分定数). ゆえに $|y| = e^{-ax+C}$. 絶対値を外して $y = \pm e^C e^{-ax}$. $\pm e^C$ を新しく C と書き直して $y = Ce^{-ax}$ (C は任意定数).

$y = C(x)e^{-ax}$ とおくと、

$$\begin{array}{rlll} & y' & = C'(x)e^{-ax} - & aC(x)e^{-ax} \\ +) & ay & = & aC(x)e^{-ax} \\ \hline & y' + ay & = C'(x)e^{-ax} & \end{array}$$

$y' + ay = b$ であるから、$C'(x)e^{-ax} = b$. ゆえに $C'(x) = be^{ax}$. 積分して

$$C(x) = \int be^{ax}\ dx = \frac{b}{a}e^{ax} + C.$$

ゆえに

$$y = C(x)e^{-ax} = \left(\frac{b}{a}e^{ax} + C\right)e^{-ax} = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}.$$

(5) まず $y' - y\tan x = 0$ を解く。$\dfrac{dy}{dx} = y\tan x$. これから $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \tan x\ dx$. 積分を実行して、$\log|y| = -\log|\cos x| + \log C$ ($\log C$ は積分定数). 移項して $\log|y\cos x| = \log C$. ゆえに $|y\cos x| = C$. 絶対値を外して $y = \pm\dfrac{C}{\cos x}$. $\pm C$ を新しく C と書き直して $y = \dfrac{C}{\cos x}$ (C は任意定数).

$y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$ とおくと、

$$\begin{array}{rlll} & y' & = C'(x)\dfrac{1}{\cos x} + & C(x)\dfrac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ -) & y\tan x & = & \dfrac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} \\ \hline & y' - y\tan x & = \dfrac{C'(x)}{\cos x} & \end{array}$$

$y' - y\tan x = \sin x$ であるから、$C'(x)\dfrac{1}{\cos x} = \sin x$. ゆえに $C'(x) = \sin x\cos x$. 積分して

$$C(x) = \int \sin x\cos x\ dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

ゆえに

$$y = \frac{C(x)}{\cos x} = \frac{-\dfrac{1}{2}\cos^2 x + C}{\cos x} = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{C}{\cos x}.$$

(8) まず $xy' + y = 0$ を解く。$x\dfrac{dy}{dx} = -y$. これから $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$. 積分を実行して、$\log|y| = -\log|x| + \log C$ ($\log C$ は積分定数). 移項して $\log|xy| = \log C$. ゆえに $|xy| = C$. 絶対値を外して $y = \pm\dfrac{C}{x}$. $\pm C$ を新しく C と書き直して $y = \dfrac{C}{x}$ (C は任意定数).

$y=\dfrac{C(x)}{x}$ とおくと、

$$
\begin{array}{rlll}
 & y' & = C'(x)\dfrac{1}{x}+ & C(x)\dfrac{-1}{x^2} \\
+) & \dfrac{1}{x}y & = & \dfrac{C(x)}{x^2} \\
\hline
 & y'+\dfrac{1}{x}y & = \dfrac{C'(x)}{x} &
\end{array}
$$

$y'+\dfrac{1}{x}y=\log x$ であるから、$\dfrac{C'(x)}{x}=\log x$. ゆえに $C'(x)=x\log x$. 積分して

$$C(x)=\int x\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C.$$

ゆえに

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{x}{2}\log x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}.$$

(11) まず $y'-xy=0$ を解く。$\dfrac{dy}{dx}=xy$. これから $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int x\ dx$. 積分を実行して、$\log|y|=\dfrac{x^2}{2}+C$ (C は積分定数). ゆえに $|y|=e^{x^2/2+C}$. 絶対値を外して $y=\pm e^Ce^{x^2/2}$. $\pm e^C$ を新しく C と書き直して $y=Ce^{x^2/2}$ (C は任意定数).

$y=C(x)e^{x^2/2}$ とおくと、

$$
\begin{array}{rlll}
 & y' & = C'(x)e^{x^2/2}+ & xC(x)e^{x^2/2} \\
-) & xy & = & xC(x)e^{x^2/2} \\
\hline
 & y'-xy & = C'(x)e^{x^2/2} &
\end{array}
$$

$y'-xy=x$ であるから、$C'(x)e^{x^2/2}=x$. ゆえに $C'(x)=xe^{-x^2/2}$. 積分して

$$C(x)=\int xe^{-x^2/2}\,dx=-e^{-x^2/2}+C.$$

ゆえに

$$y=C(x)e^{x^2/2}=\left(-e^{-x^2/2}+C\right)e^{x^2/2}=Ce^{x^2/2}-1.$$

教科書の 5.3 節の問の解答訂正

- p.255, 下から 5 行目 **5.3** 節 **1.** (10) 解答 $y=C|x|^{-a}$ が正しい。
- p.256, 4 行目 **5.3** 節 **2.** (4) 解答 $y=\dfrac{1}{1+a^2}\left(e^{ax}-a\sin x-\cos x\right)$ が正しい。
- p.256, 5 行目 **5.3** 節 **2.** (6) 解答 $y=2\cos x$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$ が適当であろう。