微分方程式参考問題

桂田 祐史

2008 年 1 月 10 日, 1 月 19 日

この講義には過去問が存在しない (桂田がこの授業を持つのは初めてだから) ので、期末試験にどういう問題を出すか、参考となる問題一式を以下に示す。**1** は変数分離形微分方程式、**2** は 1 階線形微分方程式、**3** は同次形微分方程式 (このように変数変換が必要な場合、どういう変数変換をするか問題文中で与える)、**4** は定数係数 2 階線形微分方程式である。もちろん中間点もつける。例えば **4** は、対応する同次微分方程式 (つまり $y''+2y'-15y=0$, $y''+6y'+9y=0$, $y''-4y'+13y=0$) の一般解を求めておけば、少なくとも半分の得点を与える。

1. 微分方程式 $x(x-1)\dfrac{dy}{dx}=y$ について以下の問に答えよ。
(1) 一般解を求めよ。(2) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y=1$ となる解を求めよ。

1 の解答 (1) 与えられた微分方程式から $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x(x-1)}$ であるから、

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

ゆえに

$$\log|y|=\log|x-1|-\log|x|+\log C=\log C\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad (\log C \text{ は積分定数}).$$

これから

$$y=\pm C\frac{x-1}{x}.$$

$\pm C$ を C' とおいて、$y=C'\dfrac{x-1}{x}$ (C' は任意定数).
(2) $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ を代入すると

$$1=C'\frac{1/2-1}{1/2}=-C'.$$

これから $C'=-1$. ゆえに $y=(-1)\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1-x}{x}$. ■

2. (1) 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx}=y$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx}=y+(x-2)e^x$ の一般解を求めよ。

— という問題だったのですが、これだと (1) は解けるけれど (答は「$y=Cx$ (C は任意定数)」です)、(2) が難しくなってしまうので、次のように問題を訂正します (すみません)。

2(改訂). (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ の一般解を求めよ。(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y + (x-2)e^x$ の一般解を求めよ。

もとの 2.(1) 解答 変数分離形微分方程式として解くと、$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$ から、$\log|y| = \log|x| + \log C = \log C|x|$ ($\log C$ は積分定数). これから $y = C'x$ (C' は任意定数). あるいは $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}y$ として、$y' = a(x)y$ の形をした微分方程式の解の公式

$$y = Ce^{A(x)} \quad (C \text{ は任意定数}), \quad \text{ただし} \quad A(x) := \int a(x)\,dx$$

を使うことにして、

$$A(x) = \int \frac{1}{x} = \log|x|.$$

$$y = Ce^{A(x)} = Ce^{\log|x|} = C|x| = \pm Cx = C'x.$$

ただし $C' = \pm C$ とおいた。この C' は任意定数である。

2(改訂) の解答 (1) 変数分離形としても解けます: $\dfrac{dy}{y} = dx$ より $\log|y| = x + C$ (C は積分定数) なので $|y| = e^{x+C} = e^C e^x$. これから $y = \pm e^C e^x = C'x$ ($\pm e^C$ を C' と置いた). あるいは一階線形微分方程式 $y' = a(x)y$ と考えて、解の公式 $y = Ce^{A(x)}$, $A(x) := \displaystyle\int a(x)dx$ を使ってもよい。また定数係数 1 階線形常微分方程式としても解けます (特性根は 1 なので、$y = Ce^{1x} = Ce^x$ が一般解)。

(2) 定数変化法を用います。$y = C(x)e^x$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^x + C(x)e^x = C'(x)e^x + y$$

なので、y が微分方程式の解であるためには、$C'(x)e^x = (x-2)e^x$ であればよい。これから $C'(x) = x - 2$. ゆえに $C(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + D$ (D は任意定数). ゆえに $y = \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + D\right)e^x$.

3. 微分方程式

$$(☆) \qquad (x+y)\frac{dy}{dx} = y$$

について以下の問に答えよ。

(1) $u = \dfrac{y}{x}$ とおくとき、u の満たす微分方程式を求めよ。(2) 微分方程式 (☆) の一般解を求めよ。

解答 (1) まず $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = y$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y} = \frac{y/x}{1+y/x}.$$

一方 $u = \dfrac{y}{x}$ より $y = xu$. ゆえに $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$. これを上の式に代入して

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u}.$$

移項して

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u} - u = \frac{u - u(1+u)}{1+u} = \frac{-u^2}{1+u}.$$

整理して

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u^2}{x(1+u)}.$$

(2) 微分方程式から $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{u+1}{u^2}du$ であるから、

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{u+1}{u^2}du = -\int \left(\frac{1}{u} + u^{-2}\right) du = \frac{1}{u} - \log|u| = \log\frac{e^{1/u}}{|u|}.$$

左辺は $\log|x| + \log C = \log C|x|$ ($\log C$ は積分定数) と変形できるので、

$$C|x| = \frac{e^{1/u}}{|u|} \quad \text{すなわち} \quad Cx = \frac{e^{1/u}}{u}.$$

$u = x/y$ を代入して $Cx = \dfrac{e^{x/y}}{y/x}$. $Cy = e^{x/y}$. ■

4. 次の各微分方程式の一般解を求めよ。
(1) $y'' + 2y' - 15y = x + 1$ (2) $y'' + 6y' + 9y = e^x$ (3) $y'' - 4y' + 13y = \sin 3x$

解答 (1) まず対応する同次方程式 $z'' + 2z' - 15z = 0$ の一般解を求めよう。特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$ で、特性根は $\lambda = -5, 3$. ゆえに一般解は $z = C_1e^{-5x} + C_2e^{3x}$. 特解を求めるため、$u = ax + b$ (a, b は定数) とおくと、

$$u'' + 2u' - 15u = 0 + 2 \cdot a - 15(ax + b) = -15ax + (2a - 15b).$$

これが $x + 1$ と等しくなるには、$-15a = 1$ かつ $2a - 15b = 1$ で、$a = -\dfrac{1}{15}$, $b = -\frac{17}{225}$. ゆえに $u = -\dfrac{x}{15} - \dfrac{17}{225}$. ゆえに求める一般解は

$$y = z + u = C_1e^{-5x} + C_2e^{3x} - \frac{x}{15} - \frac{17}{225}.$$

(2) まず対応する同次方程式 $z''+6z'+9z = 0$ の一般解を求めよう。特性方程式は $\lambda^2+6\lambda+9 = 0$ で、特性根は $\lambda = -3$ (重根). ゆえに一般解は $z = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. 特解を求めるため、$u = ae^x$ (a は定数) とおくと、

$$u'' + 6u' + 9u = (a + 6a + 9a)e^x = 16ae^x.$$

これが e^x と等しくなるには、$16a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{16}$. ゆえに $u=\dfrac{e^x}{16}$. ゆえに求める一般解は

$$y=z+u=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+\frac{1}{16}e^x.$$

(3) まず対応する同次方程式 $z''-4z'+13z=0$ の一般解を求めよう。特性方程式は $\lambda^2-4\lambda+13=0$ で、特性根は $\lambda=2\pm\sqrt{2^2-13}=2\pm 3i$. ゆえに一般解は $z=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$. 特解を求めるため、$u=a\cos 3x+b\sin 3x$ (a, b は定数) とおくと、

$$u''-4u'+13u=-9\left[(a-3b)\cos 3x+(3a+b)\sin 3x\right].$$

これが $\sin 3x$ と等しくなるには、

$$-9(a-3b)=0,\quad -9(3a+b)=1.$$

これを解いて $a=-\dfrac{1}{30}$, $b=-\dfrac{1}{90}$. ゆえに $u=-\dfrac{1}{90}(3\cos 3x+\sin 3x)$. ゆえに求める一般解は

$$y=z+u=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x-\frac{1}{90}(3\cos 3x+\sin 3x).$$

(正直に白状すると) 実は、例の $m\neq 0$ となる問題を出そうとしてミスしました。代りに次の問題を出しておきます。

改訂 4.(3) $y''+9y=\sin 3x$ の一般解を求めよ。

解答 まず同次方程式 $z''+9z=0$ の一般解は $z=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ (C_1, C_2 は任意定数). $u=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$ とおくと、

$$u''+9u=6b\cos 3x-6a\sin 3x.$$

これが $\sin 3x$ に等しいためには、$b=0$, $a=-\dfrac{1}{6}$. すなわち $u=-\dfrac{x}{6}\cos 3x$. ゆえに

$$y=z+u=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{x}{6}\cos 3x.$$

5. (一つくらいは蓋をあけてのお楽しみ。)

何か 1 問くらいは同じ問題が出ると期待したりしないように。
同じような問題を出すけれど、同じにはしません。