$y'' + py' + qy = f(x)$ の初期値問題の Green 関数

桂田 祐史

2007 年 12 月 23 日, 2008 年 3 月 23 日

この授業用の WWW ページは `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/ode/`

特解の求め方、教科書に書いた未定係数法は「定番」なのであるが、一般性が低いし、計算は決して簡単ではないし (面倒だからコンピューターに任せようとしても、プログラムを書くのは大変)、正直気に入らないので、欲求不満解消のため、この文書を書く。

1 目標

定理 1.1 $p, q \in \mathbf{C}$, $f\colon I \to \mathbf{C}$ は連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0 \in I$ とするとき、

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = f(x) \quad (x \in I), \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

の一意的な解は

$$u(x) := \int_{x_0}^{x} G(x-t)f(t)\,dt, \quad G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \ne \beta \text{ のとき}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる。ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根である。

この命題に対して、以下の 3 種類の証明を与える。

(a) 1 階微分方程式の解の公式を 2 回繰り返す素朴な方法 (結構面倒である…読んでも信じにくいのでは？)

(b) 畳込みの基本的な性質を利用する方法 (まあまあ見通しが良いが、重積分の順序交換をするのが難？)

(c) ラプラス変換を利用する方法 (結局ラプラス変換の勝ち？1 年生には飛び道具かもしれないけれど…)

2 素朴に挑戦

2.1 準備: 1 階定数係数線形常微分方程式

次の定理は、「1 階線形常微分方程式」で問題として解いた。

定理 2.1 $\alpha\in\mathbf{C}$, $f\colon I\to\mathbf{C}$ 連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0\in I$, $y_0\in\mathbf{C}$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=f(x)\quad(x\in I),\quad y(x_0)=y_0$$

は一意的な解

$$y=y_0e^{\alpha(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=f(x)\quad\text{かつ}\quad y(x_0)=y_0\quad\Longleftrightarrow\quad y=y_0e^{\alpha(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt.$$

これから次の二つの系を得る。最初のものは有名な定理であるが、二番目のものをこれからしばらく頭の中にとどめておこう。

系 2.1 $\alpha\in\mathbf{C}$, $f\colon I\to\mathbf{C}$ 連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0\in I$, $y_0\in\mathbf{C}$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=0\quad(x\in I),\quad y(x_0)=y_0$$

は一意的な解

$$y=y_0e^{\alpha(x-x_0)}$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=0\quad\text{かつ}\quad y(x_0)=y_0\quad\Longleftrightarrow\quad y=y_0e^{\alpha(x-x_0)}.$$

系 2.2 $\alpha\in\mathbf{C}$, $f\colon I\to\mathbf{C}$ 連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0\in I$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=f(x)\quad(x\in I),\quad y(x_0)=0$$

は一意的な解

$$y=\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt$$

を持つ。言い換えると、

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=f(x)\quad\text{かつ}\quad y(x_0)=0\quad\Longleftrightarrow\quad y=\int_{x_0}^{x}e^{\alpha(x-t)}f(t)\,dt.$$

2.2　微分作用素の因数分解あるいは連立 1 階微分方程式への帰着

$p, q \in \mathbf{C}$, $f\colon I \to \mathbf{C}$ とするとき、

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

を考える。特性方程式 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ の根を α, β とする。すなわち $\lambda^2+p\lambda+q=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$.

$$v := \frac{dy}{dx} - \beta y$$

とおくとき、

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} - \alpha v = f(x).$$

実際、

$$\frac{dv}{dx} - \alpha v = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right) - \alpha\left(\frac{dy}{dx} - \beta y\right) = \frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha+\beta)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = y'' + py' + qy$$

であるから[1]。

つまり、(1) は、連立微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - \beta y = v, \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dx} - \alpha v = f(x) \tag{3}$$

に帰着される。

ゆえに、y が (1) の解であれば、v は (3) の解であるから、1 階微分方程式の解の公式 (系 2.2) によって

$$v(x) = v(x_0)e^{\alpha(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-t)} f(t)\,dt. \tag{4}$$

一方 y は (2) の解でもあるから、やはり系 2.2 によって

$$y(x) = y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} v(t)\,dt. \tag{5}$$

(5) に (4) を代入し、$v(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$ を使って整理すると

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)}\left(v(x_0)e^{\alpha(t-x_0)} + \int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds\right)dt \\ &= y(x_0)e^{\beta(x-x_0)} + (y'(x_0) - \beta y(x_0))\int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)}e^{\alpha(t-x_0)}\,dt + \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)}\left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\,ds\right)dt. \end{aligned}$$

[1] これは微分演算子 D に慣れれば

$$(D^2 + pD + q)y = [(D-\alpha)(D-\beta)]\,y = (D-\alpha)\,[(D-\beta)y]$$

という計算で理解できる。

これで (1) の解が得られた。以下、この結果を整理する。右辺の 3 項を順に $I(x)$, $J(x)$, $K(x)$ とおくと、簡単な計算で、

$$I(x_0) = y(x_0), \quad I'(x_0) = \beta y(x_0),$$

$$J(x_0) = 0, \quad J'(x_0) = y'(x_0) - \beta y(x_0)$$

が分かるので、$w(x) := I(x) + J(x)$ とおくとき、

$$w(x_0) = y(x_0), \quad w'(x_0) = \beta y(x_0) + y'(x_0) - \beta y(x_0) = y'(x_0).$$

w は、$f \equiv 0$ とした同次微分方程式の解であるから、初期値問題

$$\frac{d^2w}{dx^2} + p\frac{dw}{dx} + qw = 0, \quad w(x_0) = y(x_0), \quad w'(x_0) = y'(x_0)$$

の解であることが分かる。ゆえに K は

$$\frac{d^2K}{dx^2} + p\frac{dK}{dx} + qK = 0, \quad K(x_0) = 0, \quad K'(x_0) = 0$$

の解である。

積分の順序を交換すると

$$K(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_s^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha(t-s)}\, dt \right) f(s)\, ds.$$

内側の積分は

$$\int_s^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha(t-s)}\, dt = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha(x-s)} - e^{\beta(x-s)}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ (x-s)e^{\alpha(x-s)} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

となるので、

(6) $$G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

とおくと、

$$K(x) = \int_{x_0}^{x} G(x-s) f(s)\, ds.$$

実はこの G を用いると、

$$J(x) = (y'(x_0) - \beta y(x_0)) G(x - x_0)$$

と書き直せる。

2.3 解の公式

定理 2.2 $p, q \in \mathbf{C}$, $f\colon I \to \mathbf{C}$ 連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{C}$, $y_1 \in \mathbf{C}$ とするとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

は一意的な解

$$y = y_0 e^{\beta(x-x_0)} + (y_1 - \beta y_0) G(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} G(x-s) f(s)\, ds$$

を持つ。ここで

$$G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根とする。

定理 2.3 $p, q \in \mathbf{C}$, $f\colon I \to \mathbf{C}$ 連続 (I は $\mathbf{R}$ の区間), $x_0 \in I$ とするとき、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x), \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

は一意的な解

$$y = \int_{x_0}^{x} G(x-s) f(s)\, ds, \quad G(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

を持つ。ただし α, β は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根とする。

3 畳み込みを利用した証明

(これは古いテキストに載せていたものである。)

一般の $f(x)$ に対して、非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{7}$$

の特解を求めるには、(1) Laplace 変換を利用する方法, (2) 定数変化法など色々な方法があるが、ここでは初期値問題の **Green 関数**を用いる方法を紹介する。

定理 3.1 (Green 関数による特解) 2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の 2 根を α, β とするとき、

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ の場合}) \\ x e^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ の場合}), \end{cases} \tag{8}$$

$$u(x) = \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy \tag{9}$$

とおくと、

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

が成り立つ。すなわち u は (7) の特解である。

この定理に現れた関数 G のことを微分方程式 (7) の初期値問題の **Green 関数**とよぶ。

例 3.1 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ の特解を求めてみよう。特性根は 2, 3 であるから、Green 関数は

$$G(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3-2} = e^{3x} - e^{2x}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_0^x G(x-y) f(y)\, dy &= \int_0^x (e^{3(x-y)} - e^{2(x-y)}) e^{2y}\, dy = e^{3x} \int_0^x e^{-y}\, dy - e^{2x} \int_0^x dy \\ &= e^{3x}(1 - e^{-x}) - e^{2x} x = e^{3x} - e^{2x} - x e^{2x} \end{aligned}$$

は一つの特解である[2]。同次方程式の一般解が $y = Ae^{3x} + Be^{2x}$ であることに注意すると、$u = -xe^{2x}$ も特解であることが分かる。 ■

定義 3.1 区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数 f, g があるとき、関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y) g(y)\, dy \quad (x \in [0, \infty))$$

で定義し、f と g の**畳み込み**(たたみこみ)または**合成積**とよぶ。

例 3.2 関数 $e_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$e_1(x) = 1, \quad e_{k+1} = e_1 * e_k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

で定義するとき、

$$e_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{10}$$

[2] この計算は難しくはないが、かなり面倒である。一方、コンピューターを用いる場合、未定係数法などと比較すると、プログラムが単純で使いやすい。

である。実際、(10) が $n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$e_{k+1}(x)=(e_1*e_k)(x)=\int_0^x e_1(x-y)e_k(y)\,dy=\int_0^x 1\cdot\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\,dy=\left[\frac{y^k}{k!}\right]_0^x=\frac{x^k}{k!}$$

であり、帰納法により (10) は任意の自然数 n について成り立つことが分かる。■

畳み込みを用いると、上の (9) の u は $u=G*f$ と書けることが分かる。畳み込みは上の定理の証明にも活躍する。そのために少し準備しよう。

命題 3.1 (畳み込みの性質) (1) $(c_1f_1+c_2f_2)*g=c_1(f_1*g)+c_2(f_2*g)$.

(2) $f*g=g*f$.

(3) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(4) $f*g\equiv 0$ ならば $f\equiv 0$ または $g\equiv 0$.

証明 (1) は簡単であるので省略する。(2), (3) は演習問題とする。(4) は以下の議論に必要がないので省略する[3]。■

定理の証明に入る前に、定数係数 1 階線型微分方程式の初期値問題

$$y'-ay=f(x),\quad y(0)=0$$

の解は

$$y=\int_0^x e^{a(x-y)}f(y)\,dy$$

であることを思い出しておく。畳み込みを用いると

$$y=(e^{ax}*f)(x)$$

とも書ける。

定理の証明 $A(x):=e^{\alpha x}$, $B(x):=e^{\beta x}$ とおく。u が

$$u''+pu'+qu=f(x),\quad u(0)=u'(0)=0$$

を満たすとするとき、$v:=u'-\beta u$ とおくと、

$$v'-\alpha v=(v''-\beta v')-\alpha(v'-\beta)=v''-(\alpha+\beta)v'+\alpha\beta v=v''+pv'+qv=f(x),$$

$$v(0)=u'(0)-\beta u(0)=0-\beta\cdot 0=0$$

であるから、上に書いた注意より

$$v(x)=(A*f)(x).$$

ところで

$$u'-\beta u=v(x),\quad u(0)=0$$

[3]例えば Yosida, Functional analysis, 6th ed., Springer (1980) を見よ。

であるから、$u = B * v$. ゆえに

$$u = B * v = B * (A * f) = (B * A) * f.$$

ゆえに $G := B * A$ とおくと、$u = G * f$ となる。以下 G を具体的に計算して求めよう。
　$\alpha \neq \beta$ の場合は

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x B(x-y)A(y)\,dy = \int_0^x e^{\beta(x-y)} e^{\alpha y}\,dy = e^{\beta x}\int_0^x e^{(\alpha-\beta)y}\,dy \\ &= e^{\beta x}\left[\frac{e^{(\alpha-\beta)y}}{\alpha-\beta}\right]_0^x = \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

一方、$\alpha = \beta$ の場合は、

$$G(x) = \int_0^x B(x-y)A(y)\,dy = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} e^{\alpha y}\,dy = e^{\alpha x}\int_0^x dy = x e^{\alpha x}.\blacksquare$$

問題

1. 畳み込みについて、交換法則 $f * g = g * f$, 結合法則 $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つことを証明せよ。(**注意**: 後者の証明には重複積分の順序交換が必要である。)

2. G を $y'' + py' + qy = 0$ (p, q は定数) の Green 関数とするとき、$G'' + pG' + qG = 0$, $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$ が成り立つことを示せ。

3. Cauchy の補題

$$\int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n dt_{n-1}\cdots dt_1 = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\,ds$$

を証明せよ。

一般の初期条件

　x_0 を f の定義域に含まれる任意の点とするとき、

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

を考える。

$$U(x) := u(x + x_0), \quad F(x) := f(x + x_0)$$

とおくと

$$U'' + pU' + qU = F, \quad U(0) = U'(0) = 0$$

となる。既に得られている定理 3.1 から、

$$U(x) = \int_0^x G(x-y)F(y)\,dy.$$

これから u を求めよう。まず

$$u(x)=U(x-x_0)=\int_0^{x-x_0} G\left((x-x_0)-y\right)F(y)dy.$$

$\xi=y+x_0$ とおくと、$d\xi=dy$, $y=0$ のとき $\xi=x_0$, $y=x-x_0$ のとき $\xi=x$, $(x-x_0)-y=x-x_0-(\xi-x_0)=x-\xi$, $y=\xi-x_0$ であるから、

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} G(x-\xi)F(\xi-x_0)d\xi=\int_{x_0}^{x} G(x-\xi)f(\xi)d\xi=\int_{x_0}^{x} G(x-y)f(y)\,dy.$$

任意の $x_0\in\mathbf{R}$ を固定したとき、

$$(f*g)(x):=\int_{x_0}^{x} f(x-y)g(y)\,dy$$

で「ずれた畳み込み」を定義するとき、

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

が成り立つのだろうか。

n 階方程式への拡張

n 階の微分方程式

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

への拡張について説明しておく。

特性根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ として、

$$G(x)=e^{\alpha_1x}*e^{\alpha_2x}*\cdots*e^{\alpha_nx},\quad u(x)=G*f(x)$$

とおくと、u は

$$u^{(n)}+a_1u^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}u'+a_nu=f(x),\quad u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-1)}(0)=0$$

をみたす。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s)=\mathcal{L}[e^{\alpha_1x}*\cdots*e^{\alpha_nx}](s)=\mathcal{L}[e^{\alpha_1x}](s)\cdots\mathcal{L}[e^{\alpha_nx}](s)=\frac{1}{s-\alpha_1}\cdots\frac{1}{s-\alpha_n}.$$

この右辺を部分分数分解してから、Laplace 逆変換すれば G が求められる。

特に特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\frac{1}{s-\alpha_1}\cdots\frac{1}{s-\alpha_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{s-\alpha_j},\quad A_j=\prod_{j\neq k}(\alpha_k-\alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に

$$G(x)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{\alpha_jx}$$

であることがわかる。なお、G は次の条件で特徴づけられる:

$$G^{(n)}+a_1G^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}G'+a_nG=0,$$
$$G(0)=G'(0)=\cdots=G^{(n-2)}(0)=0,\quad G^{(n-1)}(0)=1.$$

問 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、$G(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。

4 ラプラス変換を利用する方法

ラプラス変換は、道具一式を用意するのに手間がかかるが、結局は一番見通しが良いかもしれない。ラプラス変換を袖にする数学書も多いが、学習しておく価値はあるな、と思う次第である。

命題 4.1 p, q は実数, $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{C}$ を連続関数とするとき、常微分方程式の初期値問題

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t) \quad (t \in (0,\infty)), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

の解は、

$$x(t) = \int_0^t G(t-s) f(s)\, ds$$

で与えられる。ここで G は次式で定義される関数である (初期値問題の Green 関数と呼ばれる):

$$G(t) := L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+ps+q}\right](t) = e^{\alpha t} * e^{\beta t} = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ te^{\alpha t} & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

ただし α と β は、2 次方程式 $s^2 + ps + q = 0$ の 2 根とする。

証明 与えられた微分方程式をラプラス変換して、ラプラス変換の線形性を用いると

$$L[x''(t)](s) + pL[x'(t)](s) + qL[x(t)](s) = L[f](s).$$

左辺第 1 項と第 2 項に、導関数のラプラス変換の公式

$$L\left[g^{(k)}(t)\right](s) = s^k L[g(t)](s) - s^{k-1}g(0) - s^{k-2}g'(0) - \cdots - sg^{(k-2)}(0) - g^{(k-1)}(0)$$

を用いて、初期条件 $x(0) = x'(0) = 0$ を代入すると

$$s^2 L[x(t)](s) + psL[x(t)](s) + qL[x(t)](s) = L[f](s).$$

すなわち

$$(s^2+ps+q)L[x(t)](s) = L[f](s)$$

これを $L[x(t)](s)$ について解くと (単に割り算するだけ)

$$L[x(t)](s) = \frac{1}{s^2+ps+q} L[f](s).$$

右辺が積の形になっていることに注目して、

$$G(t) := L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+ps+q}\right](t)$$

とおくと、

$$L[x(t)](s) = L[G](s)L[f](s) = L[G * f](s)$$

となるので、逆ラプラス変換して次式を得る。

$$x(t) = G * f(t).$$

以下、G を具体的に計算する。$s^2 + ps + q = (s-\alpha)(s-\beta)$ であるから、

$$G(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)}\right](t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right](t) * L^{-1}\left[\frac{1}{s-\beta}\right](t) = e^{\alpha t} * e^{\beta t}.$$

これを求めるのに、もちろん畳込みの定義に従って積分計算しても良いが、次のようにラプラス変換を利用することも出来る。

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき、

$$\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}\right)$$

であるから

$$G(t) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right](t) - L^{-1}\left[\frac{1}{s-\beta}\right](t)\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{\alpha t} - e^{\beta t}\right).$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき、(本当はちょっと準備が必要だが)

$$G(t) = \lim_{\beta' \to \alpha} \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta' t}}{\alpha - \beta'} = \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha t} = t e^{\alpha t}. \blacksquare$$