数理リテラシー 宿題 No. 9　(2024年7月3日出題, 7月8日13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

(1)　(写像に関する) 以下の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射

(2)　次の (a)〜(c) の各場合について、集合 A から集合 B への写像をすべて求め、写像の総数、単射であるものの個数、全射であるものの個数、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。ただし p, q, r は互いに相異なるものであるとする。

(a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{p, q, r\}$　(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q\}$　(c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{p, q\}$

(3)　次の各関数 f について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ。

全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りに定まらない場合は、どれか1つ見つけて答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$　(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan^{-1} x$ (主値)　$(x \in \mathbb{R})$
(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2 + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$

問 9 解説

(1) (a) $f\colon X \to Y$ が単射とは、$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ を満たすことをいう。
最後の部分を対偶 $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ で置き換えてもよい。
あるいは $(\forall x \in X)(\forall x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) \neq f(x')$ としても良い。

(b) $f\colon X \to Y$ が全射とは、$(\forall y \in X)(\exists x \in X)\ y = f(x)$ を満たすことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射とは、f が全射かつ単射であることをいう。

問題文には、定義域・終域はおろか写像の名前も書いていないので、自分で書く必要がある。また「f が単射であるとは」のような表現も必要である。

(脱線) それはさておき、否定を作れますか？

- $f\colon X \to Y$ が単射でない $\Leftrightarrow (\exists x \in X)(\exists x' \in X)\ (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$.
  あるいは、$(\exists x \in X)(\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$ でも良い。
- $f\colon X \to Y$ が全射でない $\Leftrightarrow (\exists y \in X)(\forall x \in X)\ y \neq f(x)$.
- $f\colon X \to Y$ が全単射でない $\Leftrightarrow$ f が全射でないか f が単射でない。

(2) A から B への写像の総数は $\#B^{\#A}$ である。これを覚えておいてチェックするとよい。また単射が存在する場合、その個数は順列の個数に等しい。

(a) f を定めるには、$f(1)$, $f(2)$ を $B = \{p, q, r\}$ から選べば良い。
総数は $3^2 = 9$ 個、単射 ${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6$ 個, 全射 0 個, 全単射 0 個。

$f(1)$	$f(2)$	単射	全射	全単射
p	p	×	×	×
p	q	○	×	×
p	r	○	×	×
q	p	○	×	×
q	q	×	×	×
q	r	○	×	×
r	p	○	×	×
r	q	○	×	×
r	r	×	×	×

(注: $\#A < \#B$ なので、単射は存在するが全射は存在しない)

(b) f を定めるには、$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ を $B = \{p, q\}$ から選べば良い。
総数は $2^3 = 8$ 個、単射 0 個、全射 6 個, 全単射 0 個。

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	単射	全射	全単射
p	p	p	×	×	×
p	p	q	×	○	×
p	q	p	×	○	×
p	q	q	×	○	×
q	p	p	×	○	×
q	p	q	×	○	×
q	q	p	×	○	×
q	q	q	×	×	×

(注: $\#A > \#B$ なので、全射は存在するが単射は存在しない)

(c) f を定めるには、$f(1)$, $f(2)$ を $B = \{p, q\}$ から選べば良い。
総数は $2^2 = 4$ 個、単射, 全射, 全単射いずれも ${}_2\mathrm{P}_2 = 2$ 個。

$f(1)$	$f(2)$	単射	全射	全単射
p	p	×	×	×
p	q	○	○	○
q	p	○	○	○
q	q	×	×	×
p	p	×	×	×

(注: $\#A = \#B$ なので単射も全射も存在し、
f が単射 $\Leftrightarrow$ f が全射 $\Leftrightarrow$ f が全単射. 当然個数はみな同じ。)

(余談になるけれど、線形代数に出て来る線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射、単射の話は、この問 (2) と似ているところがある。次元 n, m の大小は、単射、全射の存在可能性とかかわる。$n = m$ のときだけ単射も全射も存在する可能性があり、実は単射, 全射, 全単射は一致する。)