数理リテラシー 宿題 No. 4 (2024 年 5 月 15 日出題, 5 月 20 日 13:30 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 4 (授業の進行具合によっては問題を削除するかもしれません。授業中の指示に従って下さい。)

(1) 次の各命題を証明せよ。

(a) $(\forall x > 0)\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ (b) $(\exists z \in \mathbb{C})\ z^2 + z + 1 = 0$

(2) 次の各命題を証明せよ。

(a) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{N})\ y > x$ (b) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y$

(3) 次の論理式の否定を作れ。ただし、(a) では A は $\mathbb{R}$ の部分集合, (b) では、a は実数, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は数列とする (説明を書いたけれど、この問題を解くのにこれらの情報はほとんど必要がない)。

(a) $(\exists U \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ x \leq U.$

(b) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\quad |x_n - a| < \varepsilon.$

問 4 解説

(1) (a) x を任意の正の数とする。$(\sqrt{x})^2 = x$ であるから

$$x + \frac{1}{x} - 2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0.$$

ゆえに $x + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$. ■

(b) $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと、$z \in \mathbb{C}$ かつ

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= \frac{1 - 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3})^2 i^2}{2^2} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + 1 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4} + \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \frac{0}{4} = 0. \end{aligned}$$

ゆえに $z^2 + z + 1 = 0$. ■

(2) (a) x を任意の自然数とする。$y = x + 1$ とおくと、$y \in \mathbb{N}$ かつ $y = x + 1 > x$. ゆえに $y > x$. ■

(b) $x = 0$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ かつ任意の実数 y に対して、$x + y = 0 + y = y$. ゆえに $x + y = y$. ■

(3) (a) $\neg\left((\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x \leq U\right) \equiv (\forall U \in \mathbb{R})(\exists x \in A) x > U$.

(b) $\neg\left((\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)\, |x_n - a| < \varepsilon\right) \equiv (\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N)\, |x_n - a| \geq \varepsilon$.

本日 13 時で未提出 8 人。例年と比べてほんの少し多い。再履修の人かな。6 月 19 頃中間試験かな。宿題やらずにいきなり受けるのは危ない。

以下は 1 年前の説教。

- ここに来て、ばらけた感じ。スラスラ証明が書ける人と、何か数学的な誤解している人と、そもそも文章になっていない (証明は文章です) 人、色々。文章書ける書けないは、過去の蓄積の差 (高校での指導の差) なのだろう。きちんとやれば、すぐ追いつくので、きちんとやってください。

- 量称記号を上にあげる ($^\forall x$ とか) 人がいるけれど、単に横に書くだけで良い。$\forall x$ とか $\exists n$ とか。

- 証明は広い意味での文章である。文章になっていないものは証明でない。

  $z^2 + z + 1 = 0 \quad z = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

  と書いてあったら、ほとんど落書き。証明の中に書くときは、少なくとも

  $z^2 + z + 1 = 0$ の解は $z = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (である)。

  と書くべき。ところで「○○の解は●●である」がどういう意味であるか、論理式で書けますか？

- 証明を求められているときに、証明すべき式をいきなり書いてそれを変形していく人が少なくない。

  - 説明抜きに書いたら、普通はそれが成り立つことを主張していると読まれる可能性が高い。証明すべきことを証明抜きに主張するのはおかしい。

- すべての変形が同値変形であるか、少なくとも逆にたどれるかを明記する必要がある。途中で一つでも「ゆえに」を入れたらアウト。

同値変形できるくらいならば、逆順にして「ゆえに」で続けて結論の式まで書く方が楽だろう。

> x を任意の正の数とする。$x+\frac{1}{x}\geq 2$ は、$x>0$ であるので、$x^2+1\geq 2x$ と同値である。これは $(x-1)^2\geq 0$ と同値であるが、$x-1$ は実数であるから、つねに成り立つ。ゆえに $x+\frac{1}{x}\geq 2.$

$\to$

> x を任意の正の数とする。$x-1$ は実数であるから $(x-1)^2\geq 0.$ ゆえに $x^2+1\geq 2x.$ $x>0$ であるから (x で割っても符号は変わらず) $x+\frac{1}{x}\geq 2.$

不等式の証明について

「$(\forall x>0)x+\frac{1}{x}\geq 2$ の証明」
`https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/literacy-2023/syoumei_4_1a.pdf`

というのを書きました。

- 余計なことを書く人が多い。証明に関係のないことは書く必要がない (書かない方が良い)。
  - 「等号成立は $x=1$ のとき」とか。(この辺は「相加平均・相乗平均の関係を使う時は、等号成立条件を書きましょう」とか指導されたせいかと思うけれど、よく考えましょう。)
  - 「$z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ とする」と 2 つ書くとか (1 つで十分のはず。「どっち？」と聞きたくなります)。

一方で証明に必要なことを手抜きするとか (例えば z^2 を具体的に計算していないとか)。まあ、つねに全部書くのは面倒なので、ある程度は省略することになりますが、一方で不必要なことが書いてあると、「何が大事なのか勘違いしているのではないか？」と心配になります。