数理リテラシー 練習問題　(2024 年 7 月 17 日出題)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は 18 日晩に WWW に載せます)

問 11

(1) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ならば、f と g は全単射であることを示せ。

(2) $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。$f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。

(3) $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ で定めるとき、以下のものを求めよ (f を含まない式で表せ)。
$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$, $f\left(\{0, \pi\}\right)$, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}\left(\{2\}\right)$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)$

公開が遅れてすみません。

問 11 解答

(1) 「一般に恒等写像は全単射である。」,「$g \circ f$ が単射ならば f は単射である。」,「$g \circ f$ が全射ならば g は全射である。」ことを知っている。

- $g \circ f = \mathrm{id}_X$ が単射であるから、f は単射である。
- $g \circ f = \mathrm{id}_X$ が全射であるから、g は全射である。
- $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が単射であるから、g は単射である。
- $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が全射であるから、f は全射である。

(2) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (あるいは $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$). $f(A)$ を A の f による像と呼ぶ。

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. $f^{-1}(B)$ を B の f による逆像と呼ぶ。

(3) まずは (2) で書いた定義式に代入するところからスタートして、簡単化していく。

$$f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left\{\cos\frac{\pi}{2}\right\} = \{0\}.$$

$f(\{0, \pi\}) = \{f(x) \mid x \in \{0, \pi\}\} = \{f(x) \mid x = 0 \vee x = \pi\} = \{f(0), f(\pi)\} = \{\cos 0, \cos\pi\} = \{1, -1\}.$

f は $[-\pi/2, 0]$ では単調増加、$[0, \pi/2]$ では単調減少、$f(-\pi/2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$, f は連続なので、値 $y = f(x)$ の範囲は $0 \le y \le 1$. ゆえに

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1\} = [0, 1].$$

逆像は、方程式や不等式を解くことになる。

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \cos x = \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}. \\
f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in [-\pi, \pi] \mid f(x) \in \{2\}\} = \{x \in [-\pi, \pi] \mid \cos x = 2\} = \emptyset. \\
f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) &= \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\} = \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, \frac{1}{2} \le \cos x \le 2\right\} \\
&= \left\{x \in [-\pi, \pi] \,\middle|\, -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}\right\} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]. \blacksquare
\end{aligned}$$