数理リテラシー 宿題 No. 10 (2023 年 7 月 12 日出題, 7 月 17 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 10　一部の問題を後回しにするかもしれない。授業中の解答指示に従うこと。

(1)　次の各関数 f について、単射であるかどうか、全射であるかどうか、理由をつけて答えよ。

全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、$g\colon X \to Y$, $g(x) := f(x)$ $(x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りでない場合は、どれか 1 つ答えれば良い。

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$　(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan^{-1} x$ (主値)　$(x \in \mathbb{R})$
(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2+1)$ $(x \in \mathbb{R})$

(2) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

(3) すべての自然数 n に対して $A_n := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{n} < x \leq 2n\right\}$ とする。

(a) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。　(b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ。

(4) $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ とする。$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ならば、f と g は全単射であることを示せ。

(5) $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。$f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。

問 10 解説　まず確認しておく。

- $f\colon X \to Y$ が単射 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x, x' \in X)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$
- $f\colon X \to Y$ が単射でない $\Leftrightarrow$ $(\exists x, x' \in X)\ (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$
- $f\colon X \to Y$ が全射 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ f(x) = y$　　　(この条件は $f(X) = Y$ と同値)
- $f\colon X \to Y$ が全射でない $\Leftrightarrow$ $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ f(x) \neq y$

今回は微積分に出て来るような連続変数の写像 (関数) が対象で、単射の証明は狭義増加か狭義減少で出来る場合が多い。単射でないこと、全射でないことは比較的簡単にできる。全射の証明は、きちんとやると極限や中間値の定理を使った議論になるが、すこし難しく、内容的に微積分なので、この講義では深入りしないことにする。以下の赤文字に書いた部分はテストでは突っ込まない。

(1) (a)

- f は単射ではない。($\because$ $x = 0$, $x' = 2\pi$ とすると、$x \neq x'$ であるのに、$f(x) = 1 = f(x')$ であるから。)
- f は全射ではない。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $-1 \le f(x) \le 1$ であるから、$y = 2$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しない。
- $X = [0, \pi]$, $Y = [-1, 1]$ とおくと $g\colon X \to Y$, $g(x) = \cos x$ は全単射である。実際、
  - $g'(x) = -\sin x < 0$ $(x \in (0, \pi))$ であるから、g は狭義単調減少であるので、単射である。
  - $g(X) = [-1, 1] = Y$ であるから、g は全射である。
    (もし $g(X) = [-1, 1]$ を証明しなさい、と言われたら (注: 今回のテストではここまで問わない): $g(0) = 1$, $g(\pi) = -1$ であり、g は連続であるから、任意の $y \in (-1, 1)$ に対して、$g(x) = y$ となる x が存在する (中間値の定理から分かる)。ゆえに $[-1, 1] \subset g(X)$.
    一方　$g(X) \subset [-1, 1]$ ($\because$ $-1 \le \cos x \le 1$). 以上から $g(X) = Y$.)

(b)

- f は単射である。実際 $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} > 0$ であるから、f は狭義単調増加である。ゆえに f は単射である。
- f は全射ではない。実際、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$ であるから、$y = \pi \in \mathbb{R}$ に対して、$g(x) = y$ となる x は存在しない。
- $X = \mathbb{R}$, $Y = (-\pi/2, \pi/2)$ とすると $g\colon X \to Y$, $g(x) = \tan^{-1} x$ は全単射である。
  - g の単射性の証明は f と同じである。
  - $g(X) = (-\pi/2, \pi/2) = Y$ であるから g は全射である。
    (もし $g(X) = (-\pi/2, \pi/2) = Y$ を証明しなさいと言われたら (注: 今回のテストではここまで問わない): $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ は知っているだろうから、(1) と同じように中間値の定理に持ち込む、というのが一つのやり方。あるいは、そもそも $\tan^{-1}$ は、$F\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \tan x$ の逆関数として定めたから、$\tan^{-1}$ の値域は F の定義域 $(-\pi/2, \pi/2)$ に等しい、とする。)

(c)

- f は単射ではない ($\because$ $x = -1$, $x' = 1$ とすると、$x \neq x'$ であるが、$f(x) = \log 2 = f(x')$.)
- f は全射ではない。実際、$y = -1$ とすると、$y \in \mathbb{R}$ であるが、$f(x) = y$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しない (すべての実数 x に対して、$x^2 + 1 \ge 1$ であるから、$f(x) = \log(x^2 + 1) \ge 0$ であることに注意)。
- $X = [0, \infty)$, $Y = [0, \infty)$ とすると、$g\colon X \to Y$, $g(x) = \log(x^2 + 1)$ は全単射である。

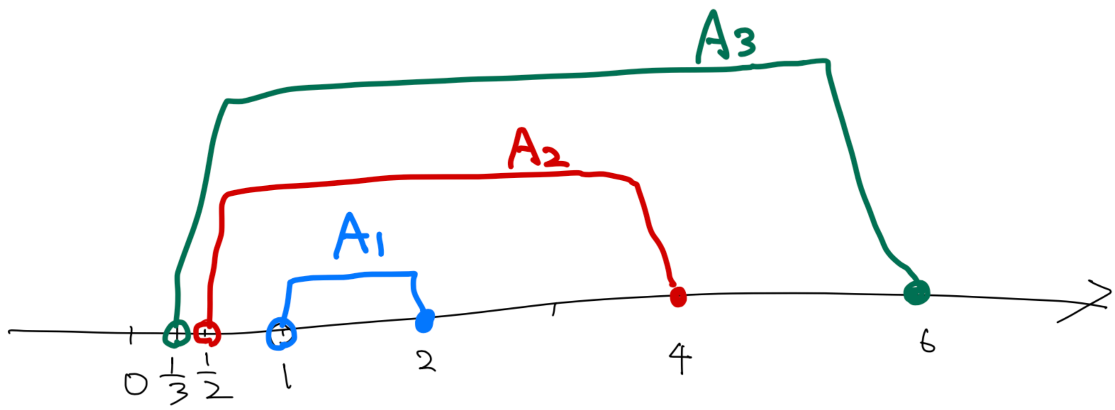
– 実際 $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} > 0$ $(x \in (0,\infty))$ であるから、f は X で狭義単調増加であるので、g は単射である。

– また $g(X) = [0,\infty) = Y$ であるから g は全射である。($g(X) = [0,\infty)$ を証明しなさいと言われたら (注: 今回のテストではここまで問わない): $g(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, g は連続であるので、中間値の定理が適用できて $[0,\infty) \subset g(X)$ が分かる (きちんとやると、$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ であるから、任意の $y \in (0,\infty)$ に対して、$y < g(x^*)$ となる $x^* > 0$ が存在する。$g(0) = 0 < y < g(x^*)$ であるので、中間値の定理が適用できて、$g(x) = y$ を満たす x が存在する。)。一方 $g(x) \geq 0$ であるから $g(X) \subset [0,\infty)$. ゆえに $g(X) = [0,\infty)$.)

(2) (こういうのはノートや教科書、講義資料から写すだけなので簡単のはず。探して写すのを面倒がらないこと。ついでに言うと、宿題で「定義を書け」と言われたものは覚えておくべき。)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

(3) (a) まず数値を代入して $A_1 = (1,2]$, $A_2 = \left(\frac{1}{2}, 4\right]$, $A_3 = \left(\frac{1}{3}, 6\right]$



(塗りつぶした丸の点は含む。塗りつぶしていない丸の点は含まない。)

(b) (まず直観的に次の式が書けるようになってほしい。ある程度は練習による慣れ。)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (1,2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}.$$

(これは集合についての等式なので、証明の方針は知っているはず。証明しようとすると $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義が必要になるけれど、それは (2) で書いてもらった。)