数理リテラシー 第4回
〜 論理 (4) 〜

桂田 祐史

2024 年 5 月 8 日

目次

連絡事項&本日の内容

宿題について　宿題 1

学年・組・番号・氏名を書いて下さい。特にプリントに書いたのでない人に書き忘れが多い。プリントに書く必要はないけれど、プリントで書かせていることは書くべき。

宿題 1　プリントに基づいて解説＆講評する。

宿題 2　未提出 10 人？ まだちょっと多い。
なるべく全員に出してもらいたい。解説は次週にするかも。

$\forall x\ p(x)$　　すべての x / 任意の x に対して / ついて $p(x)$ が成り立つ。

$\exists x\ p(x)$　　ある x が存在して $p(x)$ が成り立つ。

$p(x)$ が成り立つような $p(x)$ がある / 存在する。

2.4 複数の量称を含む命題

2.4.1 複数の変数を含む述語

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。 $\forall$, $\exists$

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。

例 4.1 (2 つの変数を含む述語)

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0$, $y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1$, $y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 x, y を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2 変数の述語で 1 つの変数に量称記号をつける

2 変数 x, y を含む述語 $p(x, y)$ に対して、

$$\underbrace{\forall y \quad p(x, y)}_{} \quad と \quad \underbrace{\exists y \quad p(x, y)}_{}$$

は、どちらも x についての述語になる。

2.4.1 2 変数の述語で 1 つの変数に量称記号をつける

2 変数 x, y を含む述語 $p(x, y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x, y) \quad \text{と} \quad \exists y \quad p(x, y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 4.2

(1) $(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$

(2) $(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$

いずれも、x についての述語である。

2.4.1 2変数の述語で1つの変数に量称記号をつける

2変数 x, y を含む述語 $p(x,y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x,y) \quad \text{と} \quad \exists y \quad p(x,y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 4.2

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x = 0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad 0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x = 1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad 1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x = 0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad 0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x = 1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad 1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$\boxed{(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x}$ も、$\boxed{(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x}$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

すべての　すべての

- $\forall x(\forall y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x, y)$」

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x, y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x, y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x, y))$　「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x, y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x, y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x, y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

3つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.3

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$$

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$

「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」

すべての

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$

「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」

これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」
これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.4

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$

「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」

これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.4

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$

「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$

「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」

これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.4

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$

「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」

これも実は真。$y = -1$ とすれば…

例 4.5

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

任意の実数 x に対して
任意の実数 y に対し〜
$x^2+y^2 \geq 2xy.$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

2.4.3 慣れるための練習 (2)

例 4.6 (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3,\ y = 4,\ z = 5$ とすると条件を満たす。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

(a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

(b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

ⓐ 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

ⓑ 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

- (a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」
- (b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

(a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

(b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注 $\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、"There exists x such that $P(x)$ holds." となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
　どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

　読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
　次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
　(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
　(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)

読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)
読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

私の意見
青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

∀ と ∃

上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう　例

例 4.7 (じゃんけん)

3 点からなる集合 $J = \{$ ぐう, ちょき, ぱあ $\}$ に、次のような 2 項関係 $\succ$ を導入する。

$$\text{ぐう} \succ \text{ちょき}, \quad \text{ちょき} \succ \text{ぱあ}, \quad \text{ぱあ} \succ \text{ぐう}$$

これ以外の場合は、$\succ$ は不成立とする ($\not\succ$)。例えば、ぱあ $\not\succ$ ちょき, ぱあ $\not\succ$ ぱあ (要するに「じゃんけん」の勝ち負けの判定)。こうすると、

$$(\forall t \in J)(\exists k \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても、その t に勝つ手 k がある) は真であるが、

$$(\exists k \in J)(\forall t \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても勝ってしまう “必勝手” k がある) は偽である。 □

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' \in I : |x - x'| < \delta)$$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

すべての正数 ε に対して、

ある正数 δ が存在して、

I のすべての要素 x に対し

I のすべての要素 x' ⋯

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の□とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の□とする」自体を省略することもあるが…)

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の$\boxed{}$とする」自体を省略することもあるが…)

例 4.8

$\underline{(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq}\ 0.$

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の$\boxed{}$とする」自体を省略することもあるが…)

例 4.8

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の $\boxed{}$ とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の $\boxed{}$ とする」自体を省略することもあるが…)

例 4.8

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

注意 (当たり前)　$\forall$を使って書かれた命題を日本語に翻訳するときは、「すべての」と「任意の」のどちらも使えるが、証明を書くときは「任意の」一択である。「x をすべての実数とする」はおかしい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$
(x を探す…

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を$\boxed{}$とおくと」あるいは「x を$\boxed{}$とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を $\boxed{}$ とおくと」あるいは「x を $\boxed{}$ とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\ \boxed{x + y = 0.}\quad y=-x$$

すべての整数 x に対して ある整数 y が存在して, $x+y=0$ が成り立つ。

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆ 3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
　(次に ($\exists y \in \mathbb{Z}$) $\cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆ 3　複数の量称 $(\forall, \exists)$ がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。$(\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z}) \cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで…)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z})$ $\cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで$\cdots$)
$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

もう一つ例をあげる。

0

例 4.11

$$(\exists x \in \mathbb{Z})\boxed{(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.}$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明 $x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

かっこの話

( ),　{ },　[ ]

　　　中かっこ　大かっこ

☆ なるべく { } は使わないことにしよう。
　集合を表すために { } を使う。

◎ 英語の世界では、まず ( ), [ ], { } の順

◎ 1つだけでわかるはず。
　プログラミング言語では、演算の結合順の指定は
　( ) だけ使うのが多いはず。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題　(一番大事なことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \land |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題　(一番大事なことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \wedge |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in I)(\forall x' : x' \in I \land |x - x'| < \delta) \quad \bigl|f(x) - f(x')\bigr| < \varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答　($\forall$ は $\exists$ に、$\exists$ は $\forall$ に置き換え、最後の条件を否定する。)

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in I)(\exists x' : x' \in I \land |x - x'| < \delta) \quad \bigl|f(x) - f(x')\bigr| \geq \varepsilon$$

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題　(一番大事なことをこの 1 枚で)

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in I)(\forall x' : x'\in I\wedge|x-x'|<\delta)\quad\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答　(∀ は ∃ に、∃ は ∀ に置き換え、最後の条件を否定する。)

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in I)(\exists x' : x'\in I\wedge|x-x'|<\delta)\quad\left|f(x)-f(x')\right|\geq\varepsilon$$

問　次の条件の否定を書け。

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in I)(\forall x' : x'\in I\wedge|x-x'|<\delta)\quad\left|f(x)-f(x')\right|<\varepsilon$$

(ただし I は $\mathbb{R}$ の区間で、f は I で定義された実数値関数とする。)

一体何だろう、これは？？

これは関数 f が I で一様連続である、という条件である。

1 年生は、そんなの知らない、というのが当たり前。しかし、内容は分からなくても、否定条件を書くことは簡単である。

解答　($\forall$ は $\exists$ に、$\exists$ は $\forall$ に置き換え、最後の条件を否定する。)

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in I)(\exists x' : x'\in I\wedge|x-x'|<\delta)\quad\left|f(x)-f(x')\right|\geq\varepsilon$$

自分が理解していない理論を使った議論は、わからなくても、そこに現れる数式の計算自体はできることが珍しくない。論理についても、式で表現してあれば、(意味がわからなくても) その計算は機械的にできる。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題

定理 4.12

以下の (1)〜(7) が任意の述語 $P(x)$, $P(x,y)$ について成り立つ。

1. $\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x))$
   「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」
2. $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x))$
   「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「任意の x に対して、$P(x)$ が成り立たない」
3. $\exists y \forall x\ P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\ P(x,y)$
4. $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$
5. $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$

特に (1),(2),(3) が重要である。(3) は同値でないことだけでも覚える。
それ以外はその都度考えれば十分。

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

定理 4.12 (続き)

6. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \land (\forall x\ Q(x))$
7. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \lor (\exists x\ Q(x))$

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

定理 4.12 (続き)

6. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \land (\forall x\ Q(x))$
7. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \lor (\exists x\ Q(x))$

- (6) で $\land$ の代わりに $\lor$ としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \lor (\forall x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

(このスライドはあまり気にしなくて良い)

定理 4.12 (続き)

6. $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \land (\forall x\ Q(x))$
7. $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \lor (\exists x\ Q(x))$

- (6) で $\land$ の代わりに $\lor$ としたものは成り立たない。

$$\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \lor (\forall x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

- (7) で $\lor$ の代わりに $\land$ としたものは成り立たない。

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \land (\exists x\ Q(x)) \quad \text{(真とは限らない)}$$

(例えば整数について考えていて、$P(x)$ は「x が偶数である」, $Q(x)$ は「x は奇数である」とすると、偽であることが分かる。)

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

1. (i) $\neg\left(\left(\forall x : P(x)\right)\ Q(x)\right) \equiv \left(\exists x : P(x)\right) \neg Q(x)$
2. (ii) $\neg\left(\left(\exists x : P(x)\right)\ Q(x)\right) \equiv \left(\forall x : P(x)\right) \neg Q(x)$

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

1. $\neg((\forall x : P(x))\ Q(x)) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$
2. $\neg((\exists x : P(x))\ Q(x)) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$

(i) の証明

$$
\begin{aligned}
\neg((\forall x : P(x))\ Q(x)) &\equiv \neg(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))) \\
&\equiv \exists x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
&\equiv \exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \\
&\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x).
\end{aligned}
$$

2.6 量称を含む論理の法則, 特に否定命題 (続き)

上にあげた法則は、付帯条件つきでも成り立つ。(1), (2) の付帯条件つきバージョンは

1. $\neg\left((\forall x : P(x))\ Q(x)\right) \equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x)$
2. $\neg\left((\exists x : P(x))\ Q(x)\right) \equiv (\forall x : P(x)) \neg Q(x)$

(i) の証明

$$
\begin{aligned}
\neg\left((\forall x : P(x))\ Q(x)\right) &\equiv \neg\left(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))\right) \\
&\equiv \exists x \neg (P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
&\equiv \exists x \neg (\neg P(x) \lor Q(x)) \\
&\equiv \exists x (P(x) \land \neg Q(x)) \\
&\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x).
\end{aligned}
$$

(ii) も同様に証明できる。興味あればやってみよう (解答はこの PDF の最後)。

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (1)

(授業では省略しました。)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$.

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (1)

(授業では省略しました。)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$.

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (1)

(授業では省略しました。)

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すために括弧を用いる。例えば、$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$.

しかし、括弧が多いと式が読みにくくなるので、数の四則演算でそうしたように、論理式についても、括弧を減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

ある本によると、優先順位の高い順に

1. $=, \in$
2. $\neg, \forall x, \exists x$
3. $\wedge, \vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow, \equiv$

($\Leftrightarrow$ はテキストによっては、$\Rightarrow$ と同じ、となっている。)

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位なので、$\wedge$ と $\vee$ が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。($\wedge$ を論理積、$\vee$ を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から $\wedge$ を優先して、$(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

2.7 補足: 論理式における演算の結合の優先順位 (2)

例えば、

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

において、上のルールを採用すると、すべての括弧が省略できる。

上のルールにおいても、$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位なので、$\wedge$ と $\vee$ が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必要であることに注意しよう。($\wedge$ を論理積、$\vee$ を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から $\wedge$ を優先して、$(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

この講義では (練習時間は取れないので) 括弧を省略しない。
(ただし、$\equiv$ の優先順位が一番低いことは仮定している。)
理解している自信がある人が括弧を省略するのは認める。

参考文献