数理リテラシー 第8回
～ 集合 (3) ～

桂田 祐史

2023 年 6 月 7 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 宿題 6(問 6) の解説を行います。
- 遅くならないうちにフィードバックを読みましょう。それで分からないことがあれば質問して下さい。
- 本日の授業内容: 集合族の続き。それから集合に関する命題の証明。特に無限集合族の合併と共通部分についての等式の証明。これで第 II 部「集合」は一応おしまいです。その後、いよいよ最終第 III 部「写像」に入ります。今回時間が余ったら突入するけれど…
- 宿題 7 を出します。〆切は 6 月 12 日 (月曜)13:30 です。
- 6 月 21 日 (水曜)4 限は中間試験を行います。

3.9 順序対と直積集合 (残り物…例 7.9 から)

例 7.7

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \land y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

例 7.8

(x, y はすでに定まっているとして) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

例 7.9

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R}\} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \text{ と } y \text{ は実数}\right\}.$$

これを $\mathbb{R}^2$ と表すこともある。2 次元ベクトルの全体とみなせる。 □

3 個以上の集合の直積も同様に定義される。例えば $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.10 ベキ集合 (2^A)

定義 8.1 (ベキ集合)

集合 A に対して、A のすべての部分集合の集合を、A の**ベキ集合** (漢字で書くと**冪集合**(べき), the power set of A) と呼び、2^A や $\mathcal{P}(A)$, $P(A)$ などの記号で表す。

$$2^A = \mathcal{P}(A) := \left\{ B \;\middle|\; B \text{ は } A \text{ の部分集合} \right\} = \{B \mid B \subset A\}.$$

例 8.2

$A = \{1\}$ のとき、$2^A = \{\emptyset, \{1\}\}$.

例 8.3

$B = \{1, 2\}$ のとき、$2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

例 8.4

$A = \{a\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

解説 $B = \{p, q\}$ のとき、$2^B = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ となることは既に見た。これに $p = \emptyset$, $q = \{a\}$ を代入する。 $\square$

3.10 ベキ集合

これは省略するかも。

例 8.5

$C=\{a,b\}$ のとき

$$2^C=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}. \tag{$\heartsuit$}$$

$a=1$ かつ $b=2$ のとき、$C=\{1,2\}$ で、当然

$$2^C=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

$a=b=1$ のとき、$C=\{1\}$ である。($\heartsuit$) に $a=b=1$ を代入すると

$$2^C=\{\emptyset,\{1\},\{1\},\{1,1\}\}=\{\emptyset,\{1\}\}=2^A,\quad A:=\{1\}.$$

集合の外延的表記のルールとして、要素を重複して書いても良いとしてあることに注意しよう。もしそういうルールにしておかないと、($\heartsuit$) は正しくない場合があることになる。

3.11 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A}=\{\{1\},\{1,2,3\}\}$　2 つの集合 $\{1\}$, $\{1,2,3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A}=2^A$ (A のベキ集合).

ここで $\mathcal{A}$ は A のカリグラフィック・フォント (の 1 つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィク・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

無限個の集合からなる集合族の和集合 (合併集合)、積集合 (共通部分) に慣れることを目標とする (頻出するので必要)。特に自然数で番号をつけられる集合 $A_1, A_2, \cdots$ に対して、和集合 (合併集合) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 積集合 (共通部分) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を扱う (この方針は、教科書 中島 [1] と同じ)。

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

($\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ の真似)

後のために整理しておく。

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、

和集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く), 積集合 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く) を次のように定める。

(1)
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

(2)
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

極限 (lim) を用いて定義するのでは**ない！**

(1), (2) はしっかり覚える

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ のとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n = (-1/n, 1/n)$. 実は

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例　$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ のとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$. 実は

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1, 1).$$

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -n < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (-n, 1)$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = (-1, 1/n)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1, 0].$$

3.12 集合についての定理, それらの証明

定理 8.6 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律),
   $A \subset B \land B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.12 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるときに参考にする (こともある) けれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族については、ヴェン図も正確には描きようがないし、実は有限個の場合でも 4 個くらいから困難になってくる。)

以下の定義が基礎となる。

1. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A))$
2. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

3.12 集合についての定理, それらの証明　簡単な例

例 8.7

集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ を満たすとき、$A \subset C$ が成り立つことを示せ。

(証明) $A \subset B$, $B \subset C$ を仮定する。

x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

例 8.8

集合 A, B, C, D が $A \subset B$, $C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。

(証明) $A \subset B$, $C \subset D$ を仮定する。x を $A \times C$ の任意の要素とすると、ある $a \in A$, $c \in C$ が存在して $x = (a, c)$. $A \subset B$ であるから、$a \in B$. $C \subset D$ であるから $c \in D$. ゆえに $x = (a, c) \in B \times D$. 従って $A \times B \subset C \times D$. $\square$

2023/6/7 の授業はここまでです。

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。

($\#$ はシャープ $\sharp$ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

例 8.9

$$\#\emptyset = 0,\ \#\{1\} = 1,\ \#\{1,2\} = 2,\ \#\{a,b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases}$$

命題 8.10 (直積集合の要素数)

有限集合 A, B に対して、$\#(A \times B) = \#A\#B$ が成り立つ。

命題 8.11 (冪集合の要素数)

有限集合 A に対して、$\#\left(2^A\right) = 2^{\#A}$ が成り立つ。

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).