数理リテラシー 第7回
〜 集合 (2) 〜

桂田 祐史

2023 年 5 月 31 日

目次

1. 本日の内容＆連絡事項
2. 集合 (続き)
    - 集合の表し方 (続き)
        - 要素の条件を書く方法 (内包的定義) (続き)
    - 包含関係 ($A \subset B$), 部分集合
    - 空集合 ($\emptyset$)
    - 順序対と直積集合 ($A \times B$)
3. 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 6 月 21 日 (水曜) の授業で中間試験を行います。試験範囲は前の週に発表しますが、今のところ論理と集合の全範囲の予定です。形式等については過去問を参照して下さい。
- 宿題 5(問 5) の解説を行います。
- 本日の授業内容: 集合の基本 (包含関係、空集合, 直積集合, 冪集合), 集合族 (特に無限集合族の合併と共通部分), 集合についての定理の証明 (講義ノート桂田 [1] の §3.5 以降)。後半は少し難しく感じるかもしれません。

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法)　寄り道　区間の記号

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

右側が $\infty)$, 左側が $(-\infty$ となっている場合も用いる。実数 x について、$x < \infty$ と $-\infty < x$ はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば $a < x < \infty$ は $a < x$ と書けば良い)。

$$
\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \quad (\text{無条件なので実数全体}).
\end{aligned}
$$

注意　(a, b) は点の座標の記号とかぶる。フランスでは (の代わりに],) の代わりに [を使う。例えば $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. 合理的かもしれない。

例 7.1

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

ただし、最後に開区間の記号 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を用いた。

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

定義 7.2 (含まれる, 含む, 部分集合)

A, B は集合とする。

$$\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (\text{これは } (\forall x \in A)\ x \in B \text{ とも書ける})$$

が成り立つとき、「A は B に**含まれる**」、「B は A を**含む**」、「A は B の**部分集合** (a subset of B)」といい、

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \supset A$$

で表す。また、その否定を $A \not\subset B$ あるいは $B \not\supset A$ で表す。

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ であることを $A \subsetneqq B$ と表し、A は B の**真部分集合** (proper subset of B) であるという。

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

例 7.3

$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{x \mid x \text{ は正三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は二等辺三角形}\}.$$

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

定理 7.4 (包含関係は半順序関係)

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
3. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

証明

1. 任意の x に対して、$x \in A$ ならば $x \in A$. ゆえに $A \subset A$.
   ($p \Rightarrow p$ は $\neg p \vee p$ であるからつねに真である。)
2. x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ より $x \in B$. $B \subset C$ より $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.
3. 任意の x に対して
   - $x \in A$ ならば $A \subset B$ より $x \in B$.
   - $x \in B$ ならば $B \subset A$ より $x \in A$.

   ゆえに $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ は真であるから $A = B$.

上の定理を見て、$\subset$ は、実数の場合の $\leq$ と似ていると思うかもしれない。

1. $a \leq a$.
2. $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.
3. $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

数の場合は、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$a \leq b$ か $b \leq a$ の少なくとも一方が成り立つが、$\subset$ については成り立たない。

$\subset$ は**半順序関係**というものになっている (詳しいことは略)。

A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$, A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ と書く流儀もある。これは $\leq$ と $<$ みたいで、それなりに納得感がある。

$\subset$ という記号はどちらの意味であるか (部分集合？それとも真部分集合？)、注意が必要である。(最近は、この授業で採用した定義が主流のように思われるが…)

3.6 空集合 ($\emptyset$)

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ あるいは $\varnothing$ で表す。

元々は、ゼロ 0 や丸 $\circ$ に / を重ねたものだそうで、ギリシャ文字のファイ ϕ とは関係がない。

命題 7.5 (空集合は任意の集合の部分集合である)

任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$.

証明.

A を任意の集合とする。任意の x に対して、$x \in \emptyset$ は偽であるから

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

は真である。ゆえに $\emptyset \subset A$. □

復習　p が偽のとき、(q の真偽が何であっても) $p \Rightarrow q$ は真である。

3.6 空集合 ($\emptyset$)　少し考えてみよう

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

$\emptyset$ の各メンバー (要素) x に、$x \in A$ を満たすかどうか試験をして、全員合格なので $\emptyset \subset A$ が成り立つ、ということだが、メンバーが 1 人もいないわけである。

たとえ話になるが、受験生がいないテストは全員合格だろうか？

受験生がいなければ、合格にならない人はいないので、全員合格である、と言うと屁理屈に聞こえないだろうか？

$\forall x\ P(x)$ は「すべての x について $P(x)$ が成り立つ」と日本語訳するけれど、$P(x)$ が成り立たないような x は存在しない、という意味である。
これは言葉の約束である。

3.9 順序対と直積集合 ($A \times B$)

定義 7.6 (順序対と直積集合)

2 つの対象 a, b が与えられたとき、順序を考えた組 (a, b) を a と b の**順序対** (ordered pair) と呼ぶ。(要するに**点の座標や数ベクトルと同様**のことを、数でない場合に拡張する、ということである。)

順序対の相等は (当然) 次のように定める。

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

A と B が集合のとき、A の要素と B の要素の順序対の全体を $A \times B$ で表し、A と B の**直積集合**と呼ぶ。

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{c \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\ c = (a, b)\}. \end{aligned}$$

3.9 順序対と直積集合

例 7.7

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

例 7.8

(x, y はすでに定まっているとして) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

例 7.9

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x \text{ と } y \text{ は実数}\right\}.$$

これを $\mathbb{R}^2$ と表すこともある。2 次元ベクトルの全体とみなせる。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合,
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/set.pdf
(2013–2021).