付 録 A　微分方程式についての補足

A.1　定数係数 2 階線型非同次方程式の特解の発見法

定数 p, q と関数 $f(x)$ が与えられたとき、

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

の特解の求め方として、本文中では未定係数法や初期値問題の Green 関数を用いる方法を紹介したが、他にも重要な方法があるので簡単に紹介しておく。

A.1.1　定数変化法

1 階線型非同次方程式のところで紹介した定数変化法 (の変種) で特解を求めることもできる。この方法はさらに大きく二つに分類できる。

(a) 連立 1 階方程式

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{F}(x)$$

に直して、公式[1]

$$\vec{y} = e^{xA}\vec{y}_0 + e^{xA}\int_{x_0}^{x} e^{-tA}\vec{F}(t)\,dt$$

を用いる。

この公式は定数変化法で簡単に導出できて「暗記要らず」であり、また理論的な考察には非常に便利だが、具体的な問題を解く場合には、計算は大げさと言うか非常に煩雑になりやすい。

(b) 直接 2 階方程式のままで扱う方法

同次方程式の解の基本系 y_1, y_2 を求めておいて、

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

とおいてみる。まず

$$y' = \left[c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2\right] + \left[c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'\right].$$

[1]既に見た定数係数 1 階線型非同次方程式の解の公式 (本文中にある) の一般化である。

このまま y'' を計算するとき、第 1 項の微分が煩雑になるので、

(2) $$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$$

という条件を仮定してしまう (c_1, c_2 に条件として課す)。すると、

$$\begin{aligned} y' &= c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2', \\ y'' &= \left[c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'\right] + \left[c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''\right] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} L[y] &= y'' + py' + qy = c_1(x)L[y_1] + c_2(x)L[y_2] + \left[c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'\right] \\ &= c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2'. \end{aligned}$$

ゆえに $L[y] = f(x)$ を満たすには、

(3) $$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$$

でなければならない。

(2), (3) を連立方程式として解いて $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ を求め、積分して $c_1(x)$, $c_2(x)$ を求め、特解 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ を得る。

例 A.1 (2 階方程式に対する定数変化法の例) $L[y] = y'' - 6y' + 8y = e^x$. まず同次方程式 $L[z] = 0$ の一般解は $z = Ae^{2x} + Be^{4x}$. そこで特解を

$$y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{4x}$$

とおいてみる。

$$y' = \left(c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(c_1(x)2e^{2x} + c_2(x)4e^{4x}\right)$$

であるが

(4) $$c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{4x} = 0$$

を仮定すると

$$y' = 2c_1(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{4x}.$$

これから

$$y'' = \left(2c_1'(x)e^{2x} + 4c_2'(x)e^{4x}\right) + \left(4c_1(x)e^{2x} + 16c_2(x)e^{4x}\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} L[y] &= \left(2c_1'(x)e^{2x}+4c_2'(x)e^{4x}\right)+\left(4c_1(x)e^{2x}+16c_2(x)e^{4x}\right)-6\left(2c_1(x)e^{2x}+4c_2(x)e^{4x}\right) \\ &\quad +\left(c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{4x}\right) \\ &= 2c_1'(x)e^{2x}+4c_2'(x)e^{4x}. \end{aligned}$$

これが e^x に等しければよいので、

$$2c_1'(x)e^{2x}+4c_2'(x)e^{4x}=e^x. \tag{5}$$

(4), (5) をまとめて、

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

これを c_1', c_2' について解く。

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ 2e^{2x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{-x} \\ \dfrac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}.$$

これを満たす c_1, c_2 としては、例えば

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-x} \\ -\dfrac{1}{6}e^{-3x} \end{pmatrix}$$

とすれば良い。つまり特解として

$$u=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)e^{4x}=\frac{1}{2}e^{-x}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-3x}e^{4x}=\frac{1}{3}e^x$$

が得られる。これから $L[y]=e^x$ の一般解は

$$y=Ae^{2x}+Be^{4x}+\frac{1}{3}e^x.\blacksquare$$

この方法も理論的な問題にはしばしば効力を発揮するが、実際の問題を解くには計算が面倒になりがちである。

A.1.2 演算子法

演算子法にも色々あるが、Oliver Heaviside[2] (1850–1925, 英国) が電気回路の問題に現れる常微分方程式 (不連続な非同次項を持つ) を解くために導入し、組織的に使ってみせたものが、一番強力で、また広く普及している。微分演算子 p とその逆演算子 p^{-1}

$$pf(x)=\frac{d}{dx}f(x),\quad p^{-1}f(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

[2] 業績としては、Maxwell の理論の整理なども重要である (有名な Maxwell の方程式も、あれだけ簡単になったのは Heaviside の貢献が大きいという。ベクトル解析の開発も彼によるところが大きいとか。

を導入することで、微分方程式を代数方程式に変換し、特解を機械的に容易に求めることが出来る。

演算子法の数学的正当化として、主なものは次の二つがある。

1. Laplace 変換を用いるもの (T.Bromwich による)
   多くの本に載っている。

2. ミクシンスキー (Jan Mikusiński) による方法
   ミクシンスキー自身による教科書[3] 吉田耕作『演算子法 一つの超函数論』東京大学出版会 (1982) などを見よ。

A.1.3 Laplace 変換の利用

例えば [概説] を参照せよ。

本質的には演算子法と同じと言えるのかもしれないが、演算子法と違って間違えやすいところがなく、不安なく勧められる方法である。

Laplace 変換をマスターするには少し手間がかかるが、覚えてしまえば簡単だし、応用が効くので勉強の価値はある。

A.1.4 微分演算子の因数分解に基づき一階ずつ積分していく方法

特性多項式の根を α, β とするとき、

$$(D-\alpha)\left((D-\beta)y\right)=f(x)$$

であることと、

$$(D-a)y=f(x) \quad \text{すなわち} \quad y'-ay=f(x)$$

の解が

$$y=Ce^{a(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x} e^{a(x-t)}f(t)\,dt \quad (C\text{ は任意定数})$$

で与えられることを用いると、次の定理を得る。

[3] ミクシンスキー (Jan Mikusiński) 著, 松村 英之・松浦 重武 訳, 演算子法 上, 裳華房 (1965). ミクシンスキー (Jan Mikusiński) 著, 松浦 重武・笠原 晧司 訳, 演算子法 下, 裳華房 (1967).

定理 A.2 α, β が特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根で、f が区間 I 上の連続関数、x_0 は I に含まれる任意の点とするとき、

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\beta(x-t)} \left(\int_{x_0}^{t} e^{\alpha(t-s)} f(s)\, ds \right) dt \tag{6}$$

は

$$u'' + pu' + qu = f(x), \quad u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

を満たす。

この方法は実際に実行してみると面倒だが、コンピューター上の数式処理系が利用できる場合には案外他の方法よりも簡単である。

$x_0 = 0$ の場合には、本文で紹介した Green 関数を用いる方法と本質的に同じものである。

A.1.5 Green 関数を用いる方法の n 階方程式への拡張

本文 4.7 節の内容を説明してある本は少ないので、n 階の微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

の場合への拡張について説明しておく。

特性根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ として、

$$G(x) = e^{\alpha_1 x} * e^{\alpha_2 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}, \quad u(x) = G * f(x)$$

とおくと、u は

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u = f(x), \quad u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

をみたす。Green 関数 G の計算には Laplace 変換が役立つ。

$$\mathcal{L}[G](s) \;=\; \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x} * \cdots * e^{\alpha_n x}](s) = \mathcal{L}[e^{\alpha_1 x}](s) \cdots \mathcal{L}[e^{\alpha_n x}](s) = \frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n}.$$

この右辺を部分分数分解してから、Laplace 逆変換すれば G が求められる。

特に特性根が相異なるならば、この右辺は

$$\frac{1}{s-\alpha_1} \cdots \frac{1}{s-\alpha_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{s-\alpha_j}, \quad A_j = \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)$$

と部分分数分解できるので、容易に

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{\alpha_j x}$$

であることがわかる。なお、G は次の条件で特徴づけられる:

$$G^{(n)} + a_1 G^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} G' + a_n G = 0,$$

$$G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(n-2)}(0) = 0, \quad G^{(n-1)}(0) = 1.$$

問　$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ の場合は、$G(x) = \dfrac{x^{n-1}e^{\alpha x}}{(n-1)!}$ であることを示せ。