基礎数学IIIのための多項式ノート

桂田 祐史

2005年1月6日

高校数学用語で言う整式のことを多項式と呼ぶ[1]。

1 準備 (知っているはず？のこと)

1.1 次数

この文書では、0 でない定数の次数は 0, 定数 0 の次数は $-\infty$ と約束する。こうすると、

$$\deg\left(f(x)g(x)\right) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

がつねに成り立つ。また割り算の定義を書くのが少しさぼれる。

1.2 割り算

多項式 $f(x)$, $g(x)$ (ただし $g(x) \neq 0$) が 与えられたとき、

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \quad \text{または} \quad \deg r(x) < \deg g(x)$$

を満たす多項式 $q(x)$, $r(x)$ が一意的に存在する。$q(x)$, $r(x)$ をそれぞれ $f(x)$ を $g(x)$ で割った商、余りと呼ぶ。

$r(x) = 0$ のとき、$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる、$g(x)$ は $f(x)$ を割り切る、$g(x)$ は $f(x)$ の因数であるなどといい、$g(x)|f(x)$ のように表わす。

1.3 剰余定理と因数定理

$f(x)$ を $x-a$ で割った商、余りを $q(x)$, r とすると、

$$f(x) = q(x)(x-a) + r$$

であるが、$x = a$ を代入して、

$$f(a) = r.$$

つまり「$f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$ である」。これを剰余定理という。

系として「$f(x)$ が $x-a$ で割り切れるための必要十分条件は $f(a) = 0$」が得られるが、これを因数定理という。

[1] たとえ 1 項だけからなる整式でも多項式 (polynomial) と呼ぶ。

1.4　多項式の $(x-a)$ による展開

x の任意の多項式は $x-a$ の多項式に書き直せる。
例えば $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ を $(x-1)$ の多項式で表わせることを示そう。

方法 1　$y=x-1$ とおいて、$x=y+1$ を代入する。

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+3x+4 &= (y+1)^3+2(y+1)^2+3(y+1)+4 \\ &= y^3+3y^2+3y+1 \\ &\quad +2y^2+4y+2 \\ &\quad +3y+3 \\ &\quad +4 \\ &= y^3+5y^2+10y+10 \\ &= (x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10. \end{aligned}$$

方法 2　$x=1$ の回りで Taylor 展開する。3 次多項式なので $f^{(4)}(x)=0$ であることに注意すると、4 次の剰余項は 0 になるので、

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

これに $f(1)=1,\ f'(1)=10,\ f''(1)=10,\ f'''(1)=6$ を代入すればよい。

方法 3　$x-1$ で割ることを繰り返して、余りを逆向きに拾う。

	1	2	3	4
1		1	3	6
	1	3	6	$\boxed{10}$
1		1	4	
	1	4	$\boxed{10}$	
1		1		
	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$		

これから $x^3+2x^2+3x+4=(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10$ である。実際、

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+3x+4 &= (x^2+3x+6)(x-1)+10, \\ x^2+3x+6 &= (x+4)(x-1)+10, \\ x+4 &= (x-1)+5. \end{aligned}$$

ここから逆に

$$\begin{aligned} x^2+3x+6 &= ((x-1)+5)(x-1)+10=(x-1)^2+5(x-1)+10, \\ x^3+2x^2+3x+4 &= (((x-1)+5)(x-1)+10=\left[(x-1)^2+5(x-1)+10\right](x-1)+10 \\ &= (x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10. \end{aligned}$$

2 以上の自然数 β に対して、与えられた自然数の β 進法での表記を求める計算をした経験があれば、それとの類似に気づくかも知れない。後でこの方法 3 の一般化が必要となる。

1.5 根の定義

a が $f(x)$ の根であるとは、$(x-a)|f(x)$ であることをいう。因数定理より、この条件は $f(a)=0$, つまり a が方程式 $f(x)=0$ の解であることと同値である。

a が $f(x)$ の m 重根であるとは、$(x-a)^m|f(x)$ であることをいう。

a が $f(x)$ のちょうど m 重根であるとは、$(x-a)^m|f(x)$ かつ $(x-a)^{m+1}\not|f(x)$ であることをいう。このとき m を a の重複度と呼ぶ。

命題 1.1 a が $f(x)$ の m 重根であるためには

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$$

が必要十分である。また a が $f(x)$ のちょうど m 重根であるためには、

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0,\quad f^{(m)}(a)\neq 0$$

が必要十分である。

証明　(必要性) a が $f(x)$ の m 重根であれば、適当な $q(x)$ に対して

$$f(x)=(x-a)^m q(x)$$

が成立する。Leibniz の法則より、

$$f^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^j(x-a)^m\cdot q^{(n-j)}(x).$$

$n\leq m-1$ であるとき、$j\leq m-1$ であるから、$\left(\frac{d}{dx}\right)^j(x-a)^m$ は $(x-a)$ を因数に持ち、$x=a$ を代入すると 0 になる。ゆえに

$$f^{(n)}(a)=0\quad(0\leq n\leq m-1).$$

(十分性) 帰納法を用いる。$m=1$ のときは因数定理から明らか。m のとき成立すると仮定する。$f(x)$ が

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=f^{(m)}(a)=0$$

を満たすならば、帰納法の仮定から $(x-a)^m|f(x)$ であるから、適当な $q(x)$ を取ると

$$f(x)=(x-a)^m q(x).$$

これから

$$f^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^j(x-a)^m q^{(m-j)}(x)$$

であるから、

$$f^{(m)}(a)=m!q(a).$$

ゆえに $q(a)=0$ であり、因数定理から、$\exists\widetilde{q}(x)$ s.t. $q(x)=(x-a)\widetilde{q}(x)$. すると

$$f(x)=(x-a)^m q(x)=(x-a)^{m+1}\widetilde{q}(x).$$

ゆえに $f(x)$ は $(x-a)^{m+1}$ を因数に持つ。すなわち $m+1$ のときも成り立つことが分かった。帰納法により任意の自然数について成り立つ。 ■

1.6　代数学の基本定理

次の定理は聞いたことがあるだろう。

定理 1.1 (「代数学の基本定理」, Gauss) $n \in \mathbf{N}$ とする。複素数係数の n 次の任意の多項式は複素数の範囲で 1 次因子の積に分解される。

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) は数学史上の巨人であるが、学位論文 (1799) で代数学の基本定理のはじめての証明を与えた[2]。

証明はここでは省略する。現在のカリキュラムでは複素関数論を学ぶときに応用として証明することが多い。

1.7　余談: 代数方程式の解の公式

次の二つは高校数学までで学んでいるはずである。

1 次方程式 $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ の根は $x = -b/a$.

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の根は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

高校数学では、係数 $(a,\, b,\, c)$ は実数という場合がほとんどだったはずだが、複素数にしても大丈夫である。

[2]有理関数の不定積分に関する Leibniz の結果より後のわけである。

虚数の平方根

複素数 $\lambda = \alpha + i\beta$ (α, β は実数) は、$\lambda \neq 0$ である限り、$z^2 = \lambda$ を満たす複素数 (λ の平方根) をちょうど二つだけ持つ。このことを証明しよう。$\beta = 0$ (すなわち λ が実数) のときは、よく知られていることなので、以下 $\beta \neq 0$ とする。$z = x + iy$ (x, $y \in \mathbf{R}$) とおくと、$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ であるから、$z^2 = \lambda$ の実部、虚部を比べて

$$x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta.$$

第二式から得られる $y = \beta/(2x)$ を第一式に代入して

$$x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha.$$

整理して

$$4x^4 - 4\alpha x^2 - \beta^2 = 0.$$

x^2 についての 2 次方程式と見て

$$x^2 = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}}{4} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

$x^2 \geq 0$ でなければならないから、負号は不適で、

$$x^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

$\beta \neq 0$ であるから、この式の右辺は正であり、

$$x = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

$$y = \frac{\beta}{2x} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \quad \text{(複号同順)}.$$

これらほど有用ではないが、3 次方程式、4 次方程式にも解の公式がある。ところが 5 次以上の代数方程式に対しては、四則と冪根 $\sqrt[n]{\cdot}$ のみを有限回用いた根の公式は存在しないことが証明されている (Abel[3]-Galois[4])。

これらの事実については、高木 [3] やガロア理論に関するテキストを見よ。

1.8 実係数多項式の因数分解

実係数多項式であっても、実数の範囲で 1 次式の積に因数分解できるとは限らない。虚根を持ちうるわけだが、$\alpha + i\beta$ (α, β は実数で、$\beta \neq 0$) を根とするとき、共役複素数 $\alpha - i\beta$ も根となる。これは 2 次多項式の場合は 2 次方程式の解の公式から明らかであるが、任意の次

[3]Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェーに生まれ、ノルウェーに没する).
[4]Evariste Galois (1811–1832, フランスに生まれ、フランスに没する).

数の多項式について成り立つ。

補題 **1.1** $f(x)$ を実係数多項式とすると、任意の複素数 λ に対して、

$$\overline{f(\lambda)} = f(\overline{\lambda}).$$

特に λ が $f(x)$ の根ならば $\overline{\lambda}$ も根であり、両者の重複度は一致する (つまり λ がちょうど m 重根ならば、$\overline{\lambda}$ もちょうど m 重根である)。

証明　$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ (a_j は実数, $a_0 \neq 0$) とおくと、$\overline{a}_j = a_j$ であるから、

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\lambda) &= \overline{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n} \\
&= \overline{a_0}\overline{\lambda}^n + \overline{a_1}\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}}\overline{\lambda} + \overline{a_n} \\
&= a_0\overline{\lambda}^n + a_1\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\overline{\lambda} + a_n \\
&= f\left(\overline{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

これから

$$\lambda \text{ が } f(x) \text{ の根} \quad \Leftrightarrow \quad f(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(\lambda) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lambda} \text{ が } f(x) \text{ の根}.$$

さらに λ が $f(x)$ の根で、その重複度を m とするとき、

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \cdots = f^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad f^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

から

$$f(\overline{\lambda}) = f'(\overline{\lambda}) = \cdots = f^{(m-1)}(\overline{\lambda}) = 0, \quad f^{(m)}(\overline{\lambda}) \neq 0$$

が導かれるので、$\overline{\lambda}$ の重複度も m である。■

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

とおくとき、

$$\begin{aligned}
(x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right) &= [x-(\alpha+i\beta)]\,[x-(\alpha-i\beta)] = [(x-\alpha)+i\beta]\,[(x-\alpha)-i\beta] \\
&= (x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2+\beta^2).
\end{aligned}$$

これは実係数多項式である。最後の展開をしない方がコンパクトなので、以下特に必要のない限り展開しない形に書くことにする (変数変換するにも便利である)。

特に因数

$$(x-\lambda)^m\left(x-\overline{\lambda}\right)^m = \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m$$

も実係数多項式である。

2　Euclid の互除法

2.1　最大公約多項式、互いに素

(工事中)

2.2 Euclid の互除法

$p(x)$, $q(x)$ を任意の多項式とする。以下の手順で $d(x) = \mathrm{GCD}(p(x), q(x))$ と、

$$r(x)p(x) + s(x)q(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $r(x)$, $s(s)$ が計算できる。

ステップ 1: $d(x)$ の計算

必要ならば交換することで、$\deg p(x) \geq \deg q(x)$ とする。
$f_0(x) := p(x)$, $f_1(x) := q(x)$ とおく。
$j = 0, 1, 2, \cdots$ の順に、$f_j(x)$ を $f_{j+1}(x)$ で割った商を $q_{j+1}(x)$, 余りを $f_{j+2}(x)$ とおく。

(1) $f_j(x) = q_{j+1}(x)f_{j+1}(x) + f_{j+2}(x), \quad \deg f_{j+2}(x) < \deg f_{j+1}(x) \quad$ または $\quad f_{j+2}(x) = 0.$

次数は $\deg f_0(x) \geq \deg f_1(x) > \deg f_2(x) > \cdots$ と単調に減少するから、$\exists k \geq 0$ s.t.

$$f_{k+1}(x) \neq 0, \quad f_{k+2}(x) = 0.$$

このとき明らかに

(2) $\qquad f_{k+1}(x)$ は $f_k(x)$, $f_{k+1}(x)$ の最大公約多項式.

(1) より、$f_j(x)$, $f_{j+1}(x)$ の公約式は $f_{j+2}(x)$ の約式であるので、$f_{j+1}(x)$, $f_{j+2}(x)$ の公約式である。また $f_{j+1}(x)$, $f_{j+2}(x)$ の公約式は $f_j(x)$ の約式であるので、$f_j(x)$, $f_{j+1}(x)$ の公約式である。ゆえに $f_j(x)$, $f_{j+1}(x)$ の公約式と $f_{j+1}(x)$, $f_{j+2}(x)$ の公約式は一致する。以下帰納的に

(3) $\qquad p(x)$, $q(x)$ の公約式は $f_k(x)$, $f_{k+1}(x)$ の公約式と一致する.

(2) と (3) から、$f_{k+1}(x)$ は $p(x)$, $q(x)$ の最大公約多項式になることがわかる。

ステップ 2: $r(x)$, $s(x)$ の計算

さて、

$$\begin{pmatrix} f_{j+1}(x) \\ f_{j+2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{j+1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j(x) \\ f_{j+1}(x) \end{pmatrix}$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} f_k(x) \\ f_{k+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1}(x) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix}.$$

$f_0(x) = p(x)$, $f_1(x) = q(x)$ であることに注意すると、$d(x) = f_{k+1}(x) = r(x)p(x) + s(x)q(x)$ と表わせることが分かる。

$r(x)$, $s(x)$ は部分分数分解などとも関係する。適当な条件のもとで、$r(x)$, $s(x)$ が一意的であることを示しておく。

命題 2.1 0 でない任意の多項式 $f(x), g(x)$ に対して、最大公約多項式を $d(x)$ とするとき、

$$s(x)f(x) + t(x)g(x) = d(x)$$

をみたす $s(x), t(x)$ が存在するわけだが、$f(x), g(x)$ の少なくとも一方が正の次数を持つ場合、

$$\deg s(x) < \deg g(x), \quad \deg t(x) < \deg f(x)$$

であるように $r(x), s(x)$ を選べる。

証明　割り算して

$$s(x) = q(x)g(x) + s_0(x), \quad \deg s_0(x) < \deg g(x),$$
$$t(x) = r(x)f(x) + t_0(x), \quad \deg t_0(x) < \deg f(x)$$

としておく。

$$\begin{aligned} d(x) &= s(x)f(x) + t(x)g(x) = (q(x)g(x) + s_0(x))\, f(x) + (r(x)f(x) + t_0(x))\, g(x) \\ &= s_0(x)f(x) + t_0(x)g(x) + (q(x) + r(x))f(x)g(x) \end{aligned}$$

となるが、実は $q(x) + r(x) = 0$ である。実際、

$$(q(x) + r(x))f(x)g(x) = d(x) - s_0(x)f(x) - t_0(x)g(x)$$

において次数を考えると、もし $q(x) + r(x) \neq 0$ ならば $\deg(q(x) + r(x)) \geq 0$ なので、

$$\deg((q(x) + r(x))f(x)g(x)) = \deg(q(x) + r(x)) + \deg(f(x)g(x)) \geq \deg(f(x)g(x))$$

となり、

$$\deg\left(s_0(x)f(x)\right) = \deg s_0(x) + \deg f(x) < \deg g(x) + \deg f(x) = \deg\left(f(x)g(x)\right),$$

$$\deg\left(t_0(x)g(x)\right) = \deg t_0(x) + \deg g(x) < \deg f(x) + \deg g(x) = \deg\left(f(x)g(x)\right),$$

$$\deg d(x) \leq \min\{\deg f(x), \deg g(x)\} < \deg f(x) + \deg g(x) = \deg\left(f(x)g(x)\right)$$

であるから矛盾する。ゆえに $q(x) + r(x) = 0$ である。すると

$$d(x) = s_0(x)f(x) + t_0(x)g(x), \quad \deg s_0(x) < \deg g(x), \quad \deg t_0(x) < \deg f(x). \blacksquare$$

2.3　Euclid の互除法 (書き直し)

以下、f, g, h, p, q, r 等は x の実係数多項式を表す。また多項式 f の次数を $\deg f$ と表す。

少なくとも一方は 0 でない多項式 f, g に対し、f と g の公約多項式全体の集合を (f, g) と書くことにする:

$$(f, g) := \{h; f = f_1 h,\ g = g_1 h \text{ を満たす多項式 } f_1,\ g_1 \text{ が存在する }\}.$$

(f, g) に属する多項式のうちで次数最大のものは、f と g の最大公約多項式 (greatest common divisor, GCD) である。

命題 2.2 少なくとも一方は 0 でない多項式 f, g と任意の多項式 h に対して

$$(f + hg, g) = (f, g).$$

証明　$p \in (f + hg, g)$ とすると、$f + hg = h_1 p$, $g = g_1 p$ を満たす多項式 h_1, g_1 が存在する。このとき

$$f = (f + hg) - hg = h_1 p - h \cdot g_1 p = (h_1 - hg_1)p$$

であるから、p は f の約多項式でもある。ゆえに $p \in (f, g)$.

逆に $p \in (f, g)$ とすると、$f = f_1 p$, $g = g_1 p$ を満たす多項式 f_1, g_1 が存在する。このとき

$$f + hg = f_1 p + h \cdot g_1 p = (f_1 + hg_1)p$$

であるから、p は $f + hg$ の約多項式でもある。ゆえに $p \in (f + hg, g)$. ■

系 2.1 任意の多項式 $f, g\ (\neq 0)$ に対して、f を g で割った余りを r とすると $(f, g) = (g, r)$.

証明　f を g で割った商を q とすると $f = qg + r$ なので、

$$(f, g) = (qg + r, g) = (r, g) = (g, r).$$■

定理 2.1 (ユークリッドの互除法) 多項式 $f, g\ (\neq 0)$ が与えられたとき、次の手順 (0)–(2) で多項式 d, r, s を定めると、d は f と g の最大公約多項式であり、

$$rf + sg = d$$

が成り立つ。

(0) $f_0 = f$, $f_1 = g$ とおく。

(1) $j = 0, 1, 2, \cdots$ の順に、f_j を f_{j+1} で割った商、余りをそれぞれ q_j, f_{j+2} とおき、もし $f_{j+2} = 0$ ならば j を k とおき、(2) に進む。

(2) $d = f_{k+1}$ とおく。また

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}$$

で r, s を定める (右辺の行列の積を計算し、$(2, 1)$ 成分を r, $(2, 2)$ 成分を s とおく)。

証明　f_j を f_{j+1} で割った商、余りがそれぞれ q_j, f_{j+2} であることから、$f_j = q_j f_{j+1} + f_{j+2}$ が成り立つ。ここで、$f_{j+2} = 0$ か、$f_{j+2} \neq 0$ かつ $\deg f_{j+2} < \deg f_{j+1}$ が成り立つ。系 2.1 より

$$(f_j, f_{j+1}) = (q_j f_{j+1} + f_{j+2}, f_{j+1}) = (f_{j+2}, f_{j+1}) = (f_{j+1}, f_{j+2}).$$

余りに 0 が現れないうちは $\deg f_1 > \deg f_2 > \cdots$ と次数が単調減少するので、ある整数 k が存在して $f_i \neq 0\ (1 \leq i \leq k+1)$, $f_{k+2} = 0$ となる。すると

$$\begin{aligned}(f, g) &= (f_0, f_1) = (f_1, f_2) = \cdots = (f_k, f_{k+1}) = (f_{k+1}, f_{k+2}) = (d, 0) \\ &= d \text{ の約多項式全体.}\end{aligned}$$

この両辺の次数最大の多項式を考えると、d が f と g の最大公約多項式であることがわかる。

次に $f_j = q_j f_{j+1} + f_{j+2}$ より

$$\begin{pmatrix} f_{j+1} \\ f_{j+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j \\ f_{j+1} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k-2} \\ f_{k-1} \end{pmatrix} = \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pf + qg \\ rf + sg \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ゆえに $rf + sg = f_{k+1} = d$. ■

注意 **2.1** r, s は $\deg r < \deg g$ かつ $\deg s < \deg f$ であるように取れる。実際、必要ならば割り算して

$$r = q_1 g + r_0, \quad s = q_2 f + s_0$$

としたとき実は $r_0 f + s_0 g = d$ が成り立つことが示せる (証明略)。

3 部分分数分解

3.1 方針

実係数有理式の部分分数分解可能性を主張する定理が目標である。
実係数多項式を $g(x)/f(x)$ として、以下の手順で段階的に分解していく。

1. 多項式 $q(x)$ と真分数式 $r(x)/f(x)$ への分解: $g(x)/f(x) = q(x) + r(x)/f(x)$
2. 分母 $f(x)$ の実数の範囲での因数分解:

$$f(x) = A \prod_{j=1}^{k} (x - a_j)^{m_j} \prod_{j=k+1}^{k+\ell} \left[(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right]^{m_j}. \tag{4}$$

3. 真分数式 $r(x)/f(x)$ の互いに素な分母への分解:

$$\frac{r(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_j(x)}{(x-a_j)^{m_j}} + \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \frac{r_j(x)}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{m_j}}$$

ただし $r_j(x)$ の次数は分母の次数よりも低い。

4. $r_j(x)/(x-a_j)^{m_j}$, $r_j(x)/\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{m_j}$ の分解:

$$\frac{r_j(x)}{(x-a_j)^{m_j}} = \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{a_{j,\ell}}{(x-a_j)^{\ell}}, \qquad \frac{r_j(x)}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{m_j}} = \sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{b_{j,\ell}x+c_{j,\ell}}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{\ell}}.$$

与えられた有理式 $g(x)/f(x)$ を実際に分解するには、手順 3 と 4 はまとめてしまうのが普通である。つまり (4) が得られた時点で、

$$\frac{r(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{a_{j,\ell}}{(x-a_j)^{\ell}} + \sum_{j=k+1}^{k+\ell}\sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{b_{j,\ell}x+c_{j,\ell}}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{\ell}}$$

の形に分解できることは分かるので、後は係数 $a_{j,\ell}$, $b_{j,\ell}$, $c_{j,\ell}$ を求めればよい。

3.2 多項式と真分数式への分解

任意の多項式 $f(x)$, $g(x)$ (ただし $f(x) \neq 0$) に対して、$g(x)$ を $f(x)$ で割った商と余りを $q(x)$, $r(x)$ とすると、

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{q(x)f(x)+r(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}.$$

右辺第 2 項 $\dfrac{r(x)}{f(x)}$ は分子の次数が分母の次数よりも低い (以下、このような有理式を真分数式と呼ぶ)。

3.3 (真分数式の) 互いに素な分母を持つ真分数式への分解

定理 3.1 (真分数式の部分分数分解) $f_1(x)$, $f_2(x)$ を 0 でない多項式で、互いに素であるものとするとき、任意の $r(x)$ に対して、適当に $g_1(x)$, $g_2(x)$ を選ぶと

$$\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \frac{g_2(x)}{f_2(x)}$$

が成り立つ。特に左辺が真分数式ならば、右辺の各項もそうなるように $g_1(x)$, $g_2(x)$ が選べる。

証明 1 は $f_1(x)$, $f_2(x)$ の最大公約多項式であるから、$\exists h_1(x)$, $h_2(x)$ s.t.

$$h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x) = 1.$$

両辺に $r(x)$ をかけて、$f_1(x)f_2(x)$ で割ると

$$\frac{r(x)h_1(x)}{f_2(x)}+\frac{r(x)h_2(x)}{f_1(x)}=\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)}.$$

ゆえに

$$g_1(x):=r(x)h_2(x),\quad g_2(x):=r(x)h_1(x)$$

とおけば

$$\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{g_1(x)}{f_1(x)}+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}.$$

以下左辺が真分数式であると仮定する。$g_j(x)$ を $f_j(x)$ で割った商、余りを $q_j(x)$, $r_j(x)$ とすると、

$$g_j(x)=q_j(x)f_j(x)+r_j(x),\quad \deg r_j(x)<\deg f_j(x).$$

すると

$$\frac{g_j(x)}{f_j(x)}=\frac{q_j(x)f_j(x)+r_j(x)}{f_j(x)}=\frac{r_j(x)}{f_j(x)}+q_j(x).$$

ゆえに

$$\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{r_1(x)}{f_1(x)}+\frac{r_2(x)}{f_2(x)}+q_1(x)+q_2(x).$$

各項の $|x|\to\infty$ のときの挙動を考えると $q_1(x)+q_2(x)=0$ でなければならない。ゆえに

$$\frac{r(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{r_1(x)}{f_1(x)}+\frac{r_2(x)}{f_2(x)}.\blacksquare$$

3.4 $x-a$, $(x-\alpha)^2+\beta^2$ による展開

以下、

$$\frac{r(x)}{(x-a)^m},\quad \deg r(x)<m$$

と

$$\frac{r(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m},\quad \deg r(x)<2m$$

を簡単にすることを考える。

3.4.1 $r(x)/(x-a)^m$

すでに (1.4 で) 見たように

$$r(x)=\sum_{j=0}^{m-1}a_j(x-a)^j$$

と展開できる。

$$\frac{r(x)}{(x-a)^m}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j(x-a)^j}{(x-a)^m}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{a_j}{(x-a)^{m-j}}=\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\widetilde{a}_\ell}{(x-a)^\ell},\quad \widetilde{a}_\ell:=a_{m-\ell}.$$

3.4.2 $r(x)/\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m$

$Q(x) := (x-\alpha)^2+\beta^2$ とおく。これは 2 次式であるから、$2m-1$ 次以下の多項式である $r(x)$ は

$$r(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)Q(x)^j, \quad \deg a_j(x) \le 1$$

と展開できる (一次式の場合と同じ理屈)。

$$\frac{r(x)}{Q(x)^m} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_jQ(x)^j}{Q(x)^m} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j}{Q(x)^{m-j}} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\widetilde{a}_\ell}{Q(x)^\ell}, \quad \widetilde{a}_\ell := a_{m-\ell}.$$

3.5 余談

この文書は、もともと有理関数の不定積分可能性の話をする必要性から書かれたものだが、実は有理関数の不定積分を計算するのに、部分分数分解を使わない方法もある。しかし部分分数分解はあちこちで出て来る計算で、標準的な演算と考えて良い。

4 応用 1: 有理関数の不定積分

Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) は 1702, 1703 年に発表した 2 編の論文で、有理関数の積分が初等関数になることを示した。

定理 4.1 (有理関数の不定積分) 有理関数の不定積分は有理関数と対数関数、Arctan で表わされる。

4.1 定理 4.1 の証明

これまでの議論から、実係数の有理式は、多項式と、

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{px+q}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m} \quad (A,\, a,\, p,\, q,\, \alpha,\, \beta \text{ は実数で、} n,\, m \text{ は自然数})$$

という形の有理式の和に表されるから、それらの不定積分が初等関数になることを示せばよい。

このうち多項式は簡単。

また

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & (n>1) \\ \log|x-a| & (n=1). \end{cases}$$

$$\int \frac{px+q}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m}\,dx$$

については、$x-\alpha=u$ と置換することによって、

$$\int \frac{u \text{ の } 1 \text{ 次式}}{(u^2+\beta^2)^n}\,du$$

に帰着される。この積分は次に掲げる漸化式を用いて計算できる。

命題 4.1 (1) b を実数, n を自然数とするとき、

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}} & (n>1) \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+b^2) & (n=1). \end{cases}$$

(2) b を 0 でない実数とするとき、

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+b^2)^n}\,dx \quad (n \text{ は自然数})$$

とおくと、

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{x}{(2n-2)(x^2+b^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right) & (n>1) \\ \dfrac{1}{b}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{b}\right) & (n=1). \end{cases}$$

証明

(1) $u = x^2+b^2$ と置換すれば簡単に示せる。

(2) $n=1$ のときは明らかである ($x = b\tan\theta$ と置換せよ)。$n>1$ のときは、I_{n-1} に対して「良く出てくる」部分積分計算を行って

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int (x^2+b^2)^{1-n}\,dx = \int (x)'\cdot(x^2+b^2)^{1-n}\,dx \\ &= x(x^2+b^2)^{1-n} - \int x\cdot(1-n)(x^2+b^2)^{-n}(2x)\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+b^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+b^2-b^2}{(x^2+b^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1} - b^2 I_n). \end{aligned}$$

移項して

$$2(n-1)b^2 I_n = \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}.$$

ゆえに

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)b^2}\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right). \blacksquare$$

5　応用 2: Laplce 変換の計算

(準備中)

6　文献紹介

多項式の話は、高校ではきちんと出来ない (特に最近はそうである) 一方で、大学の講義で正面切ってするには「大げさ」と思われているのか、省略されることが多く、意外な盲点になっていると感じている。

クラシックではあるが、高木 [3] は役に立つよい本である。特に多項式の代数的な性質にとどまらず、位相的な性質 (例えば根が係数の連続関数であるなど) や、算法的な事項 (例えば Strum 列の議論) も述べられている。

線形代数の教科書の中には多項式の性質を詳しく論じたものもある。代表的なものに齋藤 [1] がある。

算法的なことに興味のある人は、計算機に造詣の深い一松先生の [4] も読むと良い。

参考文献

[1] 齋藤 正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会 (1966).

[2] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).

[3] 高木 貞治, 代数学講義 改訂新版, 共立出版 (1965).

[4] 一松 信, 代数学入門第一 ~ 三課, 近代科学社 (1992, 1992, 1994).