2003年度基礎数学III追試験問題

2003年8月1日実施, 担当 桂田 祐史
教科書ノート等持込み不可, 解答用紙のみ提出
第1問以外は途中経過も書くこと

1 (1) 以下の空欄 ① 〜 ⑬ を埋めよ。
cosh, sinh は指数関数を使って、

$$\cosh x = \boxed{①}, \quad \sinh x = \boxed{②}$$

と定義される。また tanh は

$$\tanh x = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$$

と定義される。この 3 つの関数のうち、$\boxed{③}$ は偶関数、$\boxed{④}$ は奇関数である。

$$(\cosh x)' = \boxed{⑤}, \quad (\sinh x)' = \boxed{⑥}, \quad (\tanh x)' = \boxed{⑦}.$$

$f(x) = \tanh x$ の値域は $\boxed{⑧}$ で

$$f''(x) = \boxed{⑨}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{⑩}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{⑪}.$$

$y = f(x)$ の逆関数の導関数は $\boxed{⑫}$. また f の逆関数 $\tanh^{-1}$ を高校で習った関数だけを使って表わすと $\tanh^{-1} y = \boxed{⑬}$.
(2) $y = \tanh x$ のグラフを描け。

2 $f(x) = \sinh x$ に対して、以下の問に答えよ。
(1) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ。(2) $f(x)$ のマクローリン展開を $n-1$ 次の項で打ち切ったときの剰余項 R_n を求めよ。 (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x - x^2}{x^4}$ を求めよ。

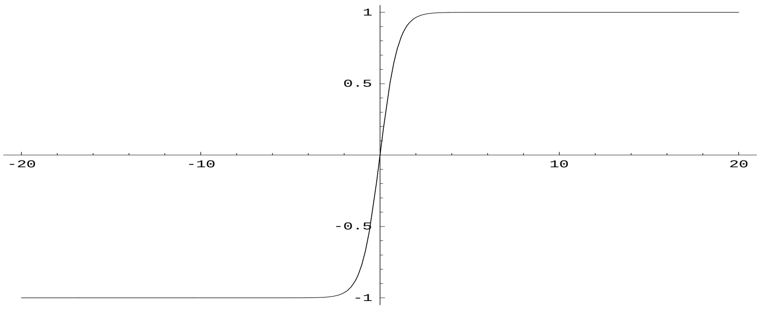
3 次の 3A, 3B のうちいずれか一方を選択して解答せよ。

3A a を正定数とするとき以下の積分を計算せよ。
(1) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. (2) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. (3) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

3B (1) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$ を求めよ。(2) $\displaystyle J = \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-1}\,dx$ を求めよ。

4 (1) p, q を実定数とするとき、$\displaystyle\lim_{R\to\infty} R^p$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^q$ を求めよ (これは結果を書くだけでよい)。
(2) α, β を正定数とするとき、$\displaystyle I_\alpha = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $\displaystyle J_\beta = \int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$ を求めよ。

1 の解答 (1) ① $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ② $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ③ cosh ④ sinh と tanh ⑤ $\sinh x$ ⑥ $\cosh x$ ⑦ $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ⑧ $(-1,1)$ ⑨ $\dfrac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}$ ⑩ -1 ⑪ 1 ⑫ $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1-y^2}$ ⑬ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$ (2) 略図



2 の解答 (1) $f'(x)=\cosh x,\ f''(x)=\sinh x$ であるから、

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sinh x & (n\text{ が偶数})\\ \cosh x & (n\text{ が奇数}),\end{cases}\qquad f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n\text{ が偶数})\\ 1 & (n\text{ が奇数}),\end{cases}$$

である。ゆえにマクローリン展開は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

(2) テイラーの定理から

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n$$

としたときの R_n は

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\quad (\theta\text{ は }x\text{ と }n\text{ で決まる }0<\theta<1\text{ の範囲の数})$$

と表される。ゆえに

$$R_n=\begin{cases}\dfrac{\sinh(\theta x)}{n!}x^n & (n\text{ が偶数})\\[2mm] \dfrac{\cosh(\theta x)}{n!}x^n & (n\text{ が奇数}),\end{cases}\qquad (\theta\text{ は }x\text{ と }n\text{ で決まる }0<\theta<1\text{ の範囲の数}).$$

(3) 上の結果から

$$f(x)=x+\frac{x^3}{6}+O(x^5)\quad (x\to 0)$$

であるから

$$\sinh^2 x=(f(x))^2=x^2+2x\cdot\frac{x^3}{6}+\left(\frac{x^3}{6}\right)^2+O(x^6)=x^2+\frac{x^4}{3}+O(x^6).$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+O(x^6)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+O(x^2)\right)=\frac{1}{3}.\blacksquare$$

3A の解答　(1) これは授業でやった。結果のみ書いておくと

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

(2) (簡単な置換積分) $t = a^2 - x^2$ とおくと $dt = -2x\,dx$ より $x\,dx = -\dfrac{1}{2}dt$ となるから、

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(3) $x = a\sin\theta$ $(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$ とおくと、

$$dx = a\cos\theta\,d\theta, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = a\cos\theta \quad (\because a\cos\theta \ge 0)$$

となるから、

$$I = \int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int (a\sin\theta)^2\cdot a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta = a^4\int \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

ここから色々なやり方があるだろうが、例えば

$$\sin^2\theta\cos^2\theta = (\sin\theta\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$$

と変形して、

$$I = a^4\int \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{a^4}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right).$$

$$\begin{aligned} a^4\sin 4\theta &= 2a^4\sin 2\theta\cos 2\theta = 4a^4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta = 4a\sin\theta\cdot a\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot a^2(1-2\sin^2\theta) \\ &= 4a\sin\theta\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}\,(a^2-2(a\sin\theta)^2) = 4x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) \end{aligned}$$

これから

$$I = \frac{1}{8}\left[a^4\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) - x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2)\right].\blacksquare$$

3B　(1) これは本試験の問題であるから結果のみ書いておくと、

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2) (これは授業でやった例題) まず部分分数への分解をする。

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-1} = \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad (A,\,B,\,C \text{ は定数})$$

とできるはずで、分母を払って等しくなるように A, B, C を定めると

$$A = 2, \quad B = C = -1.$$

つまり

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

積分のために右辺第二項を

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$

のように変形しておけば

$$\begin{aligned} J &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}I \\ &= 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

4 の解答　(1) これは本来 (2) を解くために必要な事実であり、もちろん授業で説明した。

$$\lim_{R\to\infty} R^p = \begin{cases} 0 & (p<0 \text{ の場合}) \\ 1 & (p=0 \text{ の場合}) \\ \infty & (p>0 \text{ の場合}), \end{cases} \qquad \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^q = \begin{cases} \infty & (q<0 \text{ の場合}) \\ 1 & (q=0 \text{ の場合}) \\ 0 & (q>0 \text{ の場合}). \end{cases}$$

(2) これは本試験と同じ問題であるから省略。■