解析概論II演習問題　No.1

桂田 祐史

mk@math.meiji.ac.jp

2005年9月27日

以下の問題は主に次の本から採った。

大学数学教育研究会編, 大学課程 微分積分学概説 [増補版], 共立出版 (1984).

1　閉方体上の積分

期末試験では、上限和、下限和、上積分、下積分、積分などの定義を述べさせたり (授業で説明するわけだが、自分でも一度書いてみるとよい)、定数関数が積分可能であることを証明 (授業で説明する) させたり、積分可能でない関数の例 (これも授業で説明する) をあげさせたりする。

1. (上限和、下限和)　(講義の記号を用いる。) $A=[0,1]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を $f(x)=1-x$ で定める。N を自然数、$\Delta_N=\left\{\dfrac{j}{N}\right\}_{j=0}^{N}$ とするとき、上限和 $U(f,A,\Delta_N)$ と下限和 $L(f,A,\Delta_N)$ を求めよ。(**発展**: この結果から $\displaystyle\int_A f(x)\,dx=\frac{1}{2}$ となることを示せ。)

解答 (結果のみ)

$$L(f,A,\Delta_N)=\frac{1-1/N}{2},\quad U(f,A,\Delta_N)=\frac{1+1/N}{2}.$$

2. (閉方体上の重積分)　次の重積分の値を求めよ。(a, b は正定数とする。)

(1) $A=[0,1]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ とするとき $\displaystyle\iint_A x\cos y\,dxdy.$

(2) $A=\{(x,y,z);0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2,\quad 0\le z\le 3\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_A xye^{x+y+z}dxdydz.$

(3) $A=[-1,1]\times[0,2]$ とするとき $\displaystyle\iint_A\frac{x^3}{1+y^2}dxdy.$

(4) $\displaystyle\iint_{[0,a]\times[0,b]}(x^2+y^3)dxdy.$

(5) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi]} \sin(x+y)dxdy.$

(6) $\displaystyle\iint_{[0,a]\times[0,1]} \frac{dxdy}{\sqrt{y+x^2}}.$

(7) $\displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[0,\pi/2]} x\sin(x+y)dxdy.$

(8) $\displaystyle\iint_{[0,\pi/2]\times[0,2]} x^2y\sin(xy^2)dxdy.$

答 (結果のみ) (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-1-e^2+e^3+e^5$ (3) 0 (4) $\dfrac{a^3b}{3}+\dfrac{ab^4}{4}$ (5) 2 (6) $a(-a+\sqrt{1+a^2})+\sinh^{-1}a$ (7) $-2+\pi$ (8) $\pi^2/16$

2 Jordan 可測集合上の積分

3. (**縦線集合**) 例にならって領域 D を二通りに表示せよ。

例. x 軸および半円周 $x^2+y^2=1$, $y>0$ によって囲まれる領域

$$
\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y); -1<x<1,\ 0<y<\sqrt{1-x^2}\right\} \\
&= \left\{(x,y); 0<y<1,\ -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2}\right\}
\end{aligned}
$$

(1) 直線 $y=x$, $y=0$, $x=1$ によって囲まれる領域

(2) 直線 $y=2x$, $y=2$, $x=0$ によって囲まれる領域

(3) 直線 $y=2-x$, $y=0$ および曲線 $y=x^2$ によって囲まれる領域

(4) 直線 $y=2$, $x=0$ および曲線 $y=\sqrt{x}$ によって囲まれる領域

4. (**積分の順序交換**) つぎの二重積分の積分域を図示し、積分の順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$. (2) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{y^2}^1 f(x,y)dx\right\}dy$. (3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left\{\int_0^{\sin x} f(x,y)dy\right\}dx$.

(4) $\displaystyle\int_0^a\left\{\int_0^x f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$. (5) $\displaystyle\int_{-1}^1\left\{\int_0^{1-x^2} f(x,y)dy\right\}dx$. (6) $\displaystyle\int_0^4\left\{\int_{x/4}^{3-(x/2)} f(x,y)dy\right\}dx$.

(7) $\displaystyle\int_0^{2a}\left\{\int_{\sqrt{ax/2}}^{3a-x} f(x,y)dy\right\}dx$. (8) $\displaystyle\int_0^2\left\{\int_{x^2/4}^{3-x} f(x,y)dy\right\}dx$. (9) $\displaystyle\int_{1/2}^1\left\{\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right\}dy$.

(10) $\displaystyle\int_{-1}^2\left\{\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy\right\}dx$. (11) $\displaystyle\int_0^{2a}\left\{\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{x+a} f(x,y)dy\right\}dx$, $a>0$.