# 解析概論II演習問題　補足

桂田 祐史

2006年1月17日

2005年12月5日に配布した演習問題 No.6 の参考問題の解答をつけておく。

**参考1**　$\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2y+2xy\\ x^3+x^2+2y\end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。
(1) $\boldsymbol{f}$ がポテンシャル持つことを示せ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 $C_i$ にそった線積分 $\displaystyle\int_{C_i}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。 $C_1(\cos 2t,\sin 3t)\quad (0\le t\le 2\pi)$. $C_2$ 折れ線 $(0,0)\to(-2,0)\to(-2,4)\to(2,4)$.

**解答**　(1) $\mathbf{R}^2$ は単連結領域であり、

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} &= \det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & f_1\\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2\end{pmatrix}=\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+x^2+2y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+2xy\right)\\ &= (3x^2+2x)-(3x^2+2x)=0\end{aligned}$$

であるから $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。
(2) ベクトル場がポテンシャルを持つとき、ポテンシャルは線積分で与えられる。すなわち任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$ に対して、

$$F(\boldsymbol{x})=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\quad (C_{\boldsymbol{x}}\text{ は }\mathbf{0}\text{ と }\boldsymbol{x}\text{ を結ぶ滑らかな曲線})$$

とおくと、$F$ は $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルになる。曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{\varphi}(t)=t\boldsymbol{x}$ $(t\in[0,1])$ と取ると、

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x}) &= \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt\\ &= \int_0^1\left\{\left[3(tx)^2(ty)+2(tx)(ty)\right]x+\left[(tx)^3+(tx)^2+2(ty)\right]y\right\}dt\\ &= \int_0^1\left(3t^3x^3y+2t^2x^2y+t^3x^3y+t^3x^2y+2ty^2\right)dt\\ &= \frac{3}{4}x^3y+\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{4}x^3y+\frac{1}{3}x^2y+y^2\\ &= x^3y+x^2y+y^2.\end{aligned}$$

この $F$ は確かに $\nabla F=\boldsymbol{f}$ を満たす。
(3) もちろん定義通りに線積分を計算しても構わないが、以下のように簡単に求める方法があ

る。ポテンシャル $F$ が存在するベクトル場について、線積分の値は $F$(終点) $-$ $F$(始点) である。$C_1$ は閉曲線である (始点と終点は等しい) から[1]、

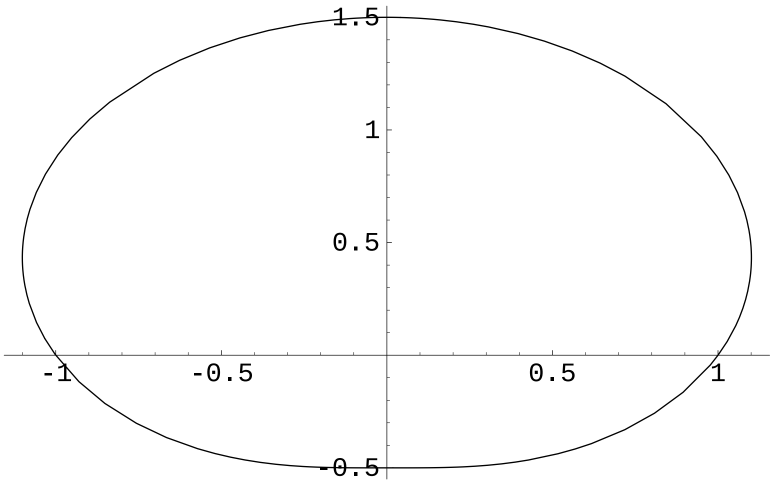
$$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

曲線 $C_2$ については始点が $(0,0)$, 終点が $(2,4)$ であるから、

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(2,4) - F(0,0) = (2^3\cdot 4 + 2^2\cdot 4 + 4^2) - 0 = 64.\blacksquare$$

**参考 2**　極座標による曲線 $r = 1 + \dfrac{\sin\theta}{2}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ について以下の問に答えよ。
(1) 曲線の概形を描け。 (2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

**解答**　(1) これは簡単でよい (微分法を用いて「曲線の追跡」をしなくてもよい)。




(2) 色々な解き方がある。

この場合は、重積分の変数変換のところで紹介した公式[2]を用いるのが簡単であると思う。

$$\begin{aligned}
\text{面積} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + \sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \sin\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{8} d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot 2\pi = \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

あるいは Green の定理の例であげた、線積分で面積を計算する公式を利用することも考えられる。$\boldsymbol{\varphi}(\theta) = \left(\left(1 + \dfrac{\sin\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + \dfrac{\sin\theta}{2}\right)\sin\theta\right)$ とパラメーターづけできるので、

$$\begin{aligned}
\text{面積} &= \int_C x\, dy = \int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{\sin\theta}{2}\right)\cos\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\left(1 + \frac{\sin\theta}{2}\right)(1 + \sin\theta) d\theta = \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

[1]他にも色々な方法がある。「ポテンシャルが存在するためには、定義域内の任意の閉曲線上の線積分が 0 であることが必要十分条件である」という定理を用いるとか、Green の定理を用いて $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_D 0\, dx\, dy = 0$ ($D$ は $C$ の囲む領域) と計算してもよい。

[2]個人的には、扇形の面積の公式の自然な一般化であり、無理なく覚えられると思う。

**参考 3**　ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$$

で定めるとき、以下の問に答えなさい。

(1) $xy$ 平面における円 $x^2+y^2=a^2$ ($a$ は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を $C$ とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

(2) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=0$ であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。

(4) 円 $(x-2)^2+y^2=1$ を正の向きに一周する閉曲線を $\widetilde{C}$ とするとき、$\displaystyle\int_{\widetilde{C}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

**解答**　(1) 曲線 $C$ は $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\cos t,\sin t)^T$ $(t\in[0,2\pi])$ とパラメーターづけできる。$\boldsymbol{\varphi}'(t)=(-\sin t,\cos t)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))=\dfrac{1}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t,\cos t)^T=(-\sin t,\cos t)^T$ であるから、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)=(-\sin t)^2+(\cos t)^2=1$ となり、

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(2) $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^T$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f} &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(x^2+y^2)\cdot 1-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2+y^2)\cdot(-1)-2y\cdot(-y)}{(x^2+y^2)^2}=0.\end{aligned}$$

(3) もしも $\boldsymbol{f}$ がポテンシャルを持てば、$C$ は閉曲線であるから、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ となるはずであるが、(1) の結果はそうでないことを示している。ゆえに $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持たない。
(4) (もちろん定義に従って線積分を計算してもよい。) $\Omega:=\{(x,y);x>0\}$ とおくと、これは単連結領域であり、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=0$ (in $\Omega$) が成り立つので、$\boldsymbol{f}$ は $\Omega$ に制限するとポテンシャルを持つことがわかる。$\widetilde{C}$ は $\Omega$ 内の閉曲線であるから、$\displaystyle\int_{\widetilde{C}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=0.$ ■

**参考 4**　$\mathbf{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2xy \\ x^2-z \\ -y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ を求めよ。 (2) $\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1,1,1)\to(2,3,1)\to(3,3,1)$ を $C$ とするとき、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

**解答**

(1) $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ と書くことにする。

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{f} &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^T \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-y) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z), \frac{\partial}{\partial z}(2xy) - \frac{\partial}{\partial x}(-y), \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right)^T \\
&= (-1 + 1, 0 - 0, 2x - 2x)^T = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{f}$ は空間全体 $\mathbf{R}^3$ で定義されていると考えることができ、$\mathbf{R}^3$ は単連結であり、$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ が成り立つから、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持ち、それは

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$$

で計算できる。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は原点 $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ を結ぶ線分とする。そのパラメーターづけは $\boldsymbol{\varphi}(t) = t\boldsymbol{x} = (tx, ty, tz)^T$ $(t \in [0, 1])$ で与えられる。$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) = (2t^2xy, t^2x^2 - tz, -ty)^T$ であるので、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = 2t^2xy \cdot x + (t^2x^2 - tz) \cdot y + (-ty) \cdot z = 3t^2x^2y - 2tyz$ となり、

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \left(3t^2x^2y - 2tyz\right) dt = x^2y - yz.$$

この $F$ は確かに $\nabla F = (2xy, x^2 - z, -y)^T = \boldsymbol{f}$ をみたす。

(3)

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} &= F(C\text{ の終点}) - F(C\text{ の始点}) = F(3, 3, 1) - F(1, 1, 1) \\
&= (3^2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) - (1^2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 24.
\end{aligned}$$

**参考 5**　$\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合 $\Omega$ で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)^T$ に対して、以下の問に答えよ。
(1) 原点中心半径 1 の円を反時計回りに一周する曲線を $C$ とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルは存在しないことを示せ。(3) 右半平面 $H = \{(x, y); x > 0,\ y \in \mathbf{R}\}$ に $\boldsymbol{f}$ を制限した $\boldsymbol{f}|_H$ のポテンシャルを求めよ。

**解答**　(1) これは「**参考 3**」の (1) と同じであるので省略する。結果は $2\pi$. (2) 閉曲線 $C$ 上の線積分が 0 にならない $(2\pi)$ ので、ポテンシャルは存在しない。(3) $H$ は単連結領域で、$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$ (in $\Omega$) が成り立つから、$\boldsymbol{f}|_H$ はポテンシャルを持つ。任意の $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ に対して、$(1, 0)^T$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を次のように定める。$(1, 0)^T$ と $(x, 0)^T$ を結ぶ線分 $C_1$ と、$(x, 0)^T$ と $(x, y)^T$

を結ぶ円弧 $C_2$ を結んだもの $(C = C_1 + C_2)$ とする。$C_1$ は $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, 0)$ $(t \in [1, x])$ とパラメーターづけできるので、

$$\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^x \left( \frac{-0}{t^2 + 0^2}, \frac{t}{x^2 + 0^2} \right)^T \cdot (1, 0)^T \, dt = \int_0^x 0 \, dt = 0.$$

一方、$C_2$ は $\boldsymbol{\psi}(t) = (x \cos t, x \sin t)$ $(t \in [0, \theta]$, ただし $\theta := \tan^{-1}(y/x)])$ とパラメーターづけできる。

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^\theta \left( \frac{-x \sin t}{x^2 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t}, \frac{x \cos t}{x^2 \cos^2 t + x^2 \sin^2 t} \right)^T \cdot (-x \sin t, x \cos t)^T \, dt \\ &= \int_0^\theta 1 \, dt = \theta = \arctan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

ゆえにポテンシャルは

$$F(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 + \arctan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) = \arctan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$