# 2002 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

2002 年 7 月 29 日施行, 担当　桂田 祐史

次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。6 は 6A, 6B, 6C のうちから一問を選択して解答せよ。

**1**　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(4) 次の $A_1$, $A_2$ の各々につき、簡単に図示し、それが有界集合かどうか、開集合かどうか、閉集合かどうか、調べよ。$A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2/4-y^2/9<1\}$, $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^4+y^4=1\}$.

**2**　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\Omega$ から $\mathbf{R}^m$ への関数について、次の 4 つの条件の関係を説明せよ。(a) $\Omega$ で連続, (b) $\Omega$ で各変数でつき偏微分可能, (c) $\Omega$ で $C^1$-級, (d) $\Omega$ で全微分可能.
(2) $f\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ を次式で定義するとき、$f$ が条件 (a)〜(d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ((x,y,z)\neq(0,0,0))\\ 0 & ((x,y,z)=(0,0,0)).\end{cases}$$

**3**　$c$ を正定数、$F\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を $C^2$-級の関数とするとき、$u\colon\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ を

$$u(x,y,z,t)=\frac{F(r-ct)}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

で定義すると、$u$ は $\mathbf{R}^4$ 全体で次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt}=c^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right).$$

**4**　$f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の極値を求めよ。

**5**　点 $(x,y,z)$ が方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}+\dfrac{(z-3)^2}{9}=1$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分集合 $E$ の上を動くときの、関数 $f(x,y,z)=x+y+z$ の値について考える。
(1) $f$ は $E$ で最大値、最小値を持つことを示せ。(2) $f$ の $E$ における最大値、最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(3) $f$ が $(x_0,y_0,z_0)$ で最大値 $k$ を取るとき、方程式 $x+y+z=k$ で表わされる集合と $E$ はどういう関係にあるか。

**6A**　平面の極座標を考える。つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) $x_r$, $x_\theta$, $y_r$, $y_\theta$ を求めよ。(b) $r_x$, $r_y$, $\theta_x$, $\theta_y$ を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 $g$ を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\dfrac{1}{r}g_r+\dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

**6B**　地球の表面上にある 2 点の緯度経度が分かっているときに、その 2 点間の (表面に沿っての) 道のりの求め方を説明せよ。(ただし地球は球であると考える。)

**6C**　$\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$, $g\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ をともに $C^1$-級の関数とする。$F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を $F(x)=(f(x),g(x))$ (内積) で定義するとき、$F'(x)$ を求めよ。

# 解説

この文書は、`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaisekigairon-1/` に載せておきます (例えば情報処理 II のページからリンクをはっておきます)。

**1** (1)〜(3) について主語がないものは減点 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。

(1) $A \subset \mathbf{R}^n$ が有界であるとは、

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことである。

(2) $A \subset \mathbf{R}^n$ が開集合であるとは、

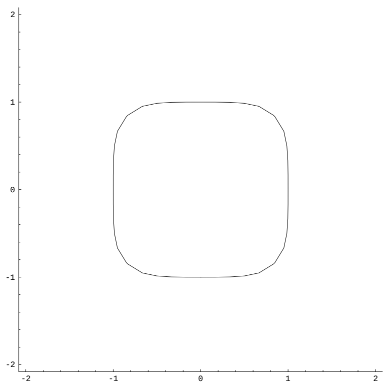
$$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a; \varepsilon) \subset A$$

が成り立つことである。

(3) $A \subset \mathbf{R}^n$ が閉集合であるとは、$A$ の補集合 $\mathbf{R}^n \setminus A$ が開集合であることである。

(4) $A_1$ は双曲線 $x^2/4 - y^2/9 = 1$ (2 本の曲線) ではさまれる (言い換えると、原点を含む) 領域 (境界含まず) で、有界ではなく、開集合であり、閉集合ではない。(境界が 2 直線 $x/2 \pm y/3 = 0$ を漸近線とする双曲線であることは良いとして、原点を含まない 2 つの領域と間違えた人が結構いた。$(x, y) = (0, 0)$ を代入するなどすれば簡単に分かると思うのだが$\cdots$)

$A_2$ は単位円の 4 角を出っ張らせた (正方形の 4 角を丸めたという方が分かりよい？) 感じの閉曲線で、有界であり、開集合ではなく、閉集合である。




これを $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ で尖った曲線にしている人が実に多かった[1](少し減点 — もっともこのミスをしても、後には響かない)。■

[1] $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ の零点集合上、$\nabla F \neq 0$ が成り立つので、尖るはずはない。

**2**　非常に出来が悪く驚いている。特に (1) は

$$\begin{array}{ccccc} \text{(c) } C^1\text{-級} & \Longrightarrow & \text{(d) 全微分可能} & \Longrightarrow & \text{(a) 連続} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(b) 各変数につき偏微分可能} & & \end{array}$$

というだけのことで、丸暗記するにしても負担がないはずなのに (丸暗記を推奨しているわけではない)、ひどいできだった。これが理解できていないと、この辺の理論構成がまったくわけが分からないものになっているのだろう (教師としてとても気が重い…)。当然 (2) についても解答は難しくなる。仕方なく (正しいことが書いてあれば点を与える)「嘘が書いてあっても減点しない」という方針で採点した。(一人だけきれいな答案を書いた学生がいた。感謝。)

(1) (c) ならば、(a), (b), (d) いずれも成立。(d) ならば、(a), (b) ともに成立。それ以外は成り立たない (反例がある)。

(2) $f$ は (a), (b) を満たすが、(c), (d) を満たさない。(a), (b) を満たすこと、(c) が成り立たないことを確かめれば、(d) が成り立たないことはすぐわかる (一般に (c) $\Longrightarrow$ (d) なので)。

まず $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ において、$f$ は分母が 0 にならない有理関数なので、$C^\infty$-級である。ゆえに原点でどうなるかを調べればよい。(a) について、$(x,y,z) \neq (0,0,0)$ に対して、

$$|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = |x|\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq |x|$$

なので、$(x,y,z) \to (0,0,0)$ のとき、$f(x,y,z) \to f(0,0,0)$. ゆえに $f$ は $(0,0,0)$ で連続。ここで、

$$x^2+y^2+z^2 \geq y^2+z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2} = 2|yz|$$

から

$$\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

となることを用いた (これをきちんと書いてくれた人は少かった)。あるいは、極座標を用いて、次のようにしてもよい。

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r\sin\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\sin\phi \cdot r\cos\theta}{(r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\cos\theta)^2} = r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

となることから

$$|f(x,y,z)| \leq |r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi| \leq r$$

ゆえに $(x,y,z) \to 0$ とするとき ($r \to 0$ なので)

$$f(x,y,z) \to 0 = f(0,0,0)$$

としても良い。$f$ が原点で各変数について偏微分可能であることを示すのは簡単なのでここでは省略。最後に $f$ が原点で全微分可能でないことを示そう。

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - f_x(0,0,0)x - f_y(0,0,0)y - f_z(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

が成り立たないことを示すことになる。$f(0,0,0)=0$, $f_x(0,0,0)=0$, $f_y(0,0,0)=0$, $f_z(0,0,0)=0$ なので、

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0$$

が成り立つかどうか、ということである。実は左辺の極限は存在せず[2]、この式は成り立たないのだが、それを確かめるには、

$$(x,y,z)=t(1,k,\ell)$$

とおいて、$t\to 0$ としたときの極限を調べるとか (2 変数で直線 $y=kx$ にそって原点に近づけるときどうなるか調べることの真似)、極座標を使うとか、色々やり方がある。■

**3** 宿題そのもの。

**4**

$$f'(x,y)=(f_x \quad f_y)=\begin{pmatrix} y-\dfrac{1}{x^2} & x-\dfrac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

なので、$f'(x,y)=0$ を満たす点は連立 1 次方程式

$$y=\frac{1}{x^2},\quad x=\frac{1}{y^2}$$

の解となる。$y$ を消去して、$x=x^4$. これから $x(x-1)(x^2+x+1)=0$. 実数解は $x=0,1$ だが、$x=0$ は元の方程式を満たさないので $x=1$ だけが解。対応する $y$ は $y=\dfrac{1}{1^2}=1$. ゆえに $(x,y)=(1,1)$. $f$ の Hesse 行列は

$$H=\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3}\end{pmatrix}$$

で、$(x,y)=(1,1)$ では $H=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$. これは正定値である (固有値を求めて、1, 3 は両方とも正と言っても良いし、主座小行列式の値 $2$, $2\cdot 2-1\cdot 1=3$ がみな正と言ってもよい)。ゆえに $f$ は $(1,1)$ で極小となる。つまり「$(x,y)=(1,1)$ で $f$ は極小値 3 を取る。」■

**5** 結果 (最大値、最小値) は宿題で計算したものに等しい。実際の計算も結局は宿題と同様のものになる。(1) $E$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であり、$f$ は連続であるから、「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の実数値連続関数は最大値・最小値を持つ」という定理により、$f$ は $E$ 上最大値を持つことが分かる。(2) Lagrange の未定乗数法の定理を適用するには、

$$g(x,y,z)=\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(z-3)^2}{9}-1$$

で定義した関数 $g$ が、$E$ の上で $\nabla g\neq 0$ を満たすことを確認する必要がある。後の計算は宿題と同じ。最大値は $6+\sqrt{14}$. (3) $x+y+z=k$ は $(x_0,y_0,z_0)$ で $E$ に接する。■

[2] 分母分子がともに 3 次同次式であるから、慣れている人には明らかである。直感的に言うと、微分をするたびに、相対的に分子の次数が低くなって、性質が悪くなっていくわけ。余談だが、最初は $f(x,y,z)=(xyz)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ という関数で問題を作ろうかとも考えていた。

**6A**　再履修者向けの問題 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。出て来た間違いも講義ノートで説明してあるものが多い。以下は余談。ヤコビ行列の定義が頭に入っていなくて、

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = -\frac{\sin\theta}{r}$$

なんてミスをして平気な人が出て来るわけだけど、物理的に考えると、次元がつりあっていなくて、明らかに変だよね (長さの次元のある量を長さの次元のある量で微分したら、無次元量になるはず — $r_y$ の方が間違いだ)。

**6B**　(誰も解いてくれなかった。この手の問題は、大昔ならば球面三角法として、講義もされだのだろうけれど、現在ではベクトルの計算で簡単にできることとして、逆にあまり説明されないのかも… 参考まで) 極座標と直交座標 (デカルト座標) の関係式を理解していれば、緯度、経度から直交座標を求める式は導けるはず (省略)。後は、地球の中心から二点 $\vec{x}, \vec{y}$ を見込む角 $\theta$ を $\cos\theta = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\left\|\vec{x}\right\| \left\|\vec{y}\right\|}$ で算出して、道のり $= R\theta$ ($R$ は地球の半径) とすれば良い。■

**6C**　逆関数定理の証明のところで用いた結果だが、講義ではうっかり間違った式 (転置したもの) を書いてしまったかもしれない。結果のみ書いておくと (確認は素朴な計算なので簡単)、($A$ の転置を $A^T$ で表わすことにして)

$$F'(x) = g(t)^T f'(x) + f(x)^T g'(x).\blacksquare$$