数学解析 宿題 No. 7 (2021年7月5日出題, 7月17日(土)18:00までにOh-o! Meijiで提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出.)

問7 (1) (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$\boxed{}$ を満たすことをいう。 (b) $\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義を書け。

(2) 以下の集合が $\mathbb{R}^n$ の開集合または閉集合であれば、そのことを証明せよ。第10回授業(6/28)の定理を用いる場合には、どの定理を用いたか記せ。

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ (b) $V = \{(2,0),(2,1),(7,5)\}$ (3点からなる集合)

(c) $(0,0)$, $(7,5)$, $(7,10)$ を頂点とする三角形の内部 Δ (ここで「内部」とは辺を含まないという意味)

(3) $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1\right\}$ とおき、$f\colon K \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ で定義するとき、f の最大値と最小値が存在することを示せ (値を求める必要はない)。

問 7 解答・解説 (1) は授業中に出て来たことを抜き出して書いてみよう、という問である。

(1) (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$\boxed{(\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset A}$ を満たすことをいう。

(b) $\boxed{A \subset \mathbb{R}^n \text{ とする。} A \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の閉集合であるとは、} A^c \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合であることをいう。}}$

(2) (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = x + y$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ で定めると、f は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。$\gamma = 1$ とおくと、$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \le \gamma\}$ と表せる。ゆえに定理 D によって、Ω は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(b) まず「$a \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$F = \{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。」という補題を証明する。

(補題の証明) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) := |x - a|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2$ で定めると、f は多項式関数であるから $\mathbb{R}^n$ 全体で連続である。$\gamma = 0$ とおくと、$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\}$. ゆえに定理 D によって、$F$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 (補題証明終)

この補題によって、$\{(2,0)\}$, $\{(2,1)\}$, $\{(7,5)\}$ はいずれも $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。ゆえに定理 C (3) によって、$V = \{(2,0)\} \cup \{(2,1)\} \cup \{(7,5)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。■

(補題を使わない別証明) $f(x,y) := [(x-2)^2 + y^2)]\,[(x-2)^2 + (y-1)^2]\,[(x-7)^2 + (y-5)^2]$, $\gamma := 0$ とおくとき、$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \gamma\}$ と表せる。f は 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 上の連続関数である。ゆえに定理 D によって、V は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。)

(c)

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{5}{7}x \wedge x < 7 \wedge y < \frac{10}{7}x \right\}$$

であるから

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x,y) > \gamma_1 \right\}, \quad f_1(x,y) = y - \frac{5}{7}x, \quad \gamma_1 = 0$$
$$\Omega_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(x,y) < \gamma_2 \right\}, \quad f_2(x,y) = x - 7, \quad \gamma_2 = 0$$
$$\Omega_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_3(x,y) < \gamma_3 \right\}, \quad f_3(x,y) = y - \frac{10}{7}x, \quad \gamma_3 = 0$$

とおくとき

$$\Delta = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$$

が成り立つ。f_1, f_2, f_3 はいずれも多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。定理 B によって、$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。ゆえに定理 A によって、Δ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。■

(3) (K が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であること。) $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = y$, $f_3(x,y) = 1 - \frac{x^2}{3} - y^2$ とおくと、これらはいずれも 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに

$$K_i = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f_i(x,y) \ge 0 \right\}$$

は、定理 D によって、$\mathbb{R}^2$ の閉集合である。$K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$ であるから、定理 C によって、K は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(K が有界集合であること。) $(x,y) \in K$ とする。

$$x^2 + y^2 = 3\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}\right) \le 3\left(\frac{x^2}{3} + y^2\right) \le 3 \cdot 1 = 3.$$

すなわち $|(x,y)| \le \sqrt{3}$. ゆえに K は有界である。

$f(x,y)$ は多項式であるから、$\mathbb{R}^2$ を定義域とすれば $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は K でも連続である。K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K における最大値、最小値が存在する。■