数学解析 宿題 No. 3　(2021 年 5 月 10 日出題, 15 日 (土)18:00 までに Oh-o! Meiji に PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名____________　(解答は裏面も使用可. 表裏を 1 つの PDF にして提出。)

問 3　(2021 年 5 月 10 日出題, 裏面利用可能)

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列, $a \in \mathbb{R}$ とするとき、次の条件 (a), (b), (c) を論理式で表せ。

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束する。　(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束しない。(否定記号 $\neg$ を用いずに表すこと。)

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界な数列である。

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、$n \to \infty$ のとき、それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するならば、$\left\{\sqrt{5}\, a_n - \sqrt{10}\, b_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\sqrt{5}\, a - \sqrt{10}\, b$ に収束することを (数列の収束の定義に基づいて) 証明せよ。
(第 3 回に命題 3.9 を紹介して、和, 積の場合をそれぞれ第 3, 4 回に証明したのを参考にすると良い。)

(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列、$L \in \mathbb{R}$ とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が L に収束し、かつ

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le b_n \le c_n$$

が成り立つならば、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も L に収束することを証明せよ。