数学解析 第 12 回

～ 開集合と閉集合 (2), コンパクト性と Weierstrass の最大値定理 ～

桂田 祐史

2021 年 7 月 5 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 本日は、前回の続き (閉集合の点列による特徴付け) と、コンパクト性と Weierstrass の最大値定理を解説します (講義ノート [1] の 9 節)。
- 宿題 7 を出します。〆切は 7 月 17 日 (土) 18:00 です。なお宿題はこれで終わりです。
- 次回の対面授業 (7 月 12 日 (月)1 限) の内容は Zoom で配信する予定です。対面授業に出席しなくても、Zoom で視聴することで出席として扱います (自分の氏名が分かるようにして接続して下さい)。なお内容は、講義ノート [1] の 10 節「積分」の予定です。
- 次回のオンライン動画資料は、対面授業の内容を収録したものにするため、公開日時は 7 月 12 日 13:00 頃になる予定です。
- 期末レポートについて。7 月 29 日 (木)12:00 に課題文を公開し、8 月 1 日 (日)12:00 までに Oh-o! Meiji で提出、というスケジュールを予定しています。このスケジュールでは都合が悪いという人は、次回の授業 (7/12) が始まる前までに (なるべく早く) 連絡して下さい。その際、いつなら良いかも教えて下さい。都合の悪い人が多い場合は変更する可能性があります。

期末レポート注意事項

1. 講義資料、参考書など、何を参考にしても構わないが、問題の内容について、他人に質問・相談しないこと (問題文の意味について、桂田に質問するのは別)。計算結果の確認にコンピューターを用いても構わない。
2. Oh-o! Meiji で 7 月 29 日 (木曜)12:00 課題発表。課題 PDF は早めに保存しておくこと。
3. 締め切りは 8 月 1 日 (日曜) 12:00 です。A4 サイズの PDF で、なるべく単一のファイルにして下さい。抜けを防ぐため、ページ番号をつけることを強く推奨します。30MB の容量制限以上のサイズになった場合は、複数の PDF にして、追加提出して下さい。コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンした PDF を提出して下さい。(式が正しく書けていないものは採点しません。)
4. 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早くメールで連絡・相談して下さい。障害が発生した場合は、締め切りの延期等をする可能性があります。
5. メールアドレスは、`katurada` あっと `meiji` ドット ac どっと jp です。
6. 質問に対する回答や、〆切の延期などは、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで公開し、公開したことを Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。

7.10 閉集合の点列による特徴づけ

定理 12.1 (閉集合の点列による特徴づけ)

$F \subset \mathbb{R}^N$ に対して、次の (i),(ii) は同値である。

1. F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である。
2. F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

証明 (i)⇒(ii) (i) (F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合) を仮定する。$\{a_n\}$ は F 内の点列、$a \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。$a \in F$ を背理法で示そう。$a \notin F$ と仮定すると、$a \in F^{\mathrm{C}}$ で、F^{C} は $\mathbb{R}^N$ の開集合であるから

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \subset F^{\mathrm{C}}.$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \in B(a;\varepsilon)$ となる。ゆえに $a_n \in F^{\mathrm{C}}$. これは $a_n \in F$ であることに矛盾する。ゆえに $a \in F$.

7.10 閉集合の点列による特徴づけ (証明続き)

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が $\mathbb{R}^N$ の閉集合でないと仮定すると、$F^{\complement}$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合ではないので、ある $a \in F^{\complement}$ が存在して

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \not\subset F^{\complement}.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ を意味する。

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ として、これを用いると、

$a_n \in B(a;\frac{1}{n}) \cap F$ となる a_n が存在する。こうして作った $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は F 内の点列で、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす。(ii) を仮定しているので $a \in F$. これは $a \in F^{\complement}$ に矛盾する。ゆえに F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である。 □

定理 12.2 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明　証明は、1 次元のときとほぼ同様である。まず (1 次元のときと同様に)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。

K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理より、収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。$c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおくと、収束列の部分列は同じ極限を持つことから

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \sup_{x\in K} f(x).$$

K は閉集合であるから、**定理 12.1 により** $c \in K$. f は c で連続であるから

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(c).$$

ゆえに $f(c) = \sup_{x\in K} f(x)$. ゆえに $f(c)$ は f の最大値である。 □

8.2 Weierstrass の最大値定理　微積分からの例題

多次元の場合、最大・最小問題は 1 次元のように簡単には解けない。増減表の多次元への拡張はできないことが大きい。そのため、微積分の入門テキストには、「極値を求めて極大極小を判定せよ。」という問題が多い (最大値、最小値を求めよ、とは言ってない)。

しかし、$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合における最大値・最小値を求める問題は比較的簡単である。Weierstrass の最大値定理によって、最大値・最小値が存在することが分かるので、議論が簡単化されるからである。

8.2 Weierstrass の最大値定理　微積分からの例題

例題 1　xy 平面上で, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする三角形 (内部と周を含む) を K とするとき、関数 $f(x,y)=2x^3+6xy^2-2x$ の K における最大値と最小値を求めよ.

解答の方針　K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K 上の最大値と最小値が存在することがわかる。K の内部で最大・最小になる可能性は、$f'(x,y)=0$ から調べることができる。内部で最大・最小にならない場合、K の内部を除いた境界 ∂K (これは 3 辺の合併) で最大・最小になるが、∂K での f の最大・最小は 1 変数関数の問題として調べることができる。

類題　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積が最大のものを求めよ (三角形版の等周問題 — 答は正三角形)。

解答の方針　3 辺を a, b, c とすると、面積 S はヘロンの公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で求められる。$a+b+c=2s$ であるから、2 変数関数の最大値問題となる。“自然に考えると” 定義域 Δ (自分で考えてみよう) は開集合であるが、有界閉集合 $\overline{\Delta}$ 上の最大値を求めれば解決する。

三角形の 3 辺を a, b, c とすると、面積 S は $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ただし $s:=(a+b+c)/2$. $c=2s-(a+b)$ を消去すると、$S=\sqrt{(s(s-a)(s-b)(a+b-s)}$. 正数 a, b, c が三角形の辺の長さになるためには、任意の 2 数の和が残りの数よりも大きいことが必要十分である。(a,b) の範囲は

$$\Delta:=\{(a,b)\mid a+b>s,\quad a<s,\quad b<s\}.$$

$f(a,b):=S^2=s(s-a)(s-b)(a+b-s)$ の $\overline{\Delta}$ における最大値を求めればよい。

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるので、Weierstrass の最大値定理により、K における f の最大値・最小値が存在することが分かる。最大値、最小値はそれぞれ極大値、極小値であるから、Lagrange の未定乗数法で極値の 1 つとして探し出せる。後は少し考えるだけで解ける。 □

K が $\mathbb{R}^3$ の閉集合であることは、もうノーヒントで分かってほしい。K が有界であることは、直観的に原点中心半径 3 の閉球に含まれることから分かる。念のため証明しておく。$\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in K$ とするとき、

$$|\boldsymbol{x}|^2=x^2+y^2+z^2\le 9\left(\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)=9\cdot 1=9\quad\text{ゆえに}\quad |\boldsymbol{x}|\le 3.\qquad\square$$

(Lagrange 未定乗数法については、例えば桂田 [2] を見よ。)

例題 3　方程式 $ax+by+cz+d=0$ ($(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, $d\in\mathbb{R}$) で表される空間内の曲面 (平面) を P とする。点 (x,y,z) が P 上を動くとき、$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ の最小値が存在することを示せ。

幾何学的に考えて、原点 O から平面 P に下ろした垂線 OH の長さの 2 乗が f の最小値と分かり、そのことを証明するのも難しくはないが、最小値の存在を Weierstrass の最大値定理を用いて証明してみよう。P は閉集合であるが、有界でないので、工夫が必要である。

解答　P 上の点 $A(x_0,y_0,z_0)$ を 1 つ取り、$R:=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$, $D:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, f(x,y,z)\le R^2\right\}$ とおく。P を

$$P=P\cap\left(D\cup D^{\complement}\right)=(P\cap D)\cup(P\cap D^{\complement})\quad(A\text{ より近い点, 遠い点})$$

と分解すると、$P\cap D$ は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるから、f は $P\cap D$ における最小値 $m=f(\alpha,\beta,\gamma)$ を持つ。$(\alpha,\beta,\gamma)\in D$ であるから、$m=f(\alpha,\beta,\gamma)\le R^2$. 一方 $P\cap D^{\complement}$ においては、$f(x,y,z)>R^2$ であるから、m は f の P 全体における最小値である。 □

8.3 コンパクト集合

「コンパクト」という言葉は「トポロジー」で学ぶ。「数学解析」の授業ではその説明を省略し、次の定理も (i) ⇔ (ii) のみ証明する。

定理 12.3 ($\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合の特徴づけ)

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 K について、次の 3 つの条件は互いに同値である。

1. (i) K は有界閉集合である。
2. (ii) K 内の任意の点列は収束部分列を持ち、その極限は K に属する。(この条件を満たすとき、K は**点列コンパクト**であるという。)
3. (iii) K の任意の開被覆に対し、有限部分被覆が存在する。(この条件を満たすとき、K は**コンパクト** (compact) であるという。)

(i)⇔(iii) は **Heine-Borel の定理**と呼ばれる。

証明　(i)⇒(ii) K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass より収束部分列を持つ。K は閉集合であるから、その極限は K に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定する。

(K が閉集合であること) K 内の点列 $\{a_n\}$ が収束すれば、その極限 a は必ず K に含まれることを示せば K が閉集合であると分かる (閉集合の点列による特徴づけ)。仮定 (ii) から、部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a'\in K$ が存在して、$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a'$. ところで、一般に収束列の部分列は同じ極限を持つ収束列であるから、$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. 極限の一意性から $a=a'$. ゆえに $a\in K$.

(K が有界であること) 背理法で証明する。K が有界でないと仮定すると、

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists a_n\in K)\quad |a_n|>n.$$

こうして作った $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、

$$|a_{n_k}|>n_k\geq k$$

を満たすので収束しない ($\{a_{n_k}\}$ は収束するならば有界であるが、非有界なので矛盾する)。 $\square$

8.3 コンパクト集合

この項を閉じるにあたり　微積分のテキストに現れる定理に、有界閉集合という条件が良く出て来るが、そのほとんどが、コンパクト空間についての定理に一般化される。Weierstrass の最大値定理も、「連続関数によるコンパクト空間の像はコンパクト」という定理の特別な場合とみなすことができる。次項では、連続関数の定積分の存在などを調べるときに役立つ一様連続性を紹介する。

8.4 一様連続性

一様連続性は、積分の基本的な議論をするときに必須の概念である。

定義 12.4 (一様連続性)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。f が Ω で**一様連続**であるとは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega)(\forall x' \in \Omega : |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$$

が成り立つことをいう。

Cf. f が Ω で連続とは

$$(\forall x \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in \Omega : |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$$

(δ が x より前に出て来るかどうかがポイント。)

定理 12.5 (「コンパクト集合上の連続関数は一様連続」の特別な場合)

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}^m$ は連続とするとき、f は K で一様連続である。

証明　背理法による。f が K で一様連続でないと仮定すると、ある正の数 ε が存在して

$$(\forall\delta>0)(\exists x\in K)(\exists x'\in K:|x-x'|<\delta)\quad \left|f(x)-f(x')\right|\geq\varepsilon.$$

$n=1,2,\cdots$ に対して $\delta:=\frac{1}{n}$ とすると、ある x_n, y_n が存在して

$$x_n\in K,\quad y_n\in K,\quad |x_n-y_n|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon.$$

こうして $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、(K の点列コンパクト性により) ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

K は閉集合であるから、$a\in K$ である。このとき $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ も a に収束する。実際

$$\begin{aligned}|y_{n_k}-a|&=|y_{n_k}-x_{n_k}+x_{n_k}-a|\leq|y_{n_k}-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|\\&\leq\frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-a|\to 0\quad(k\to\infty).\end{aligned}$$

f は a で連続であるから、

$$f(x_{n_k})\to f(a),\quad f(y_{n_k})\to f(a)\quad(k\to\infty).$$

任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon$ が (もちろん) 成り立つ。$k\to\infty$ とすると

$$0=|f(a)-f(a)|\geq\varepsilon>0.$$

これは矛盾である。ゆえに f は K で一様連続である。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：数学解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).

[2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-2011.pdf (2011).