2022 年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2023 年 1 月 25 日 (水曜) 15:00〜16:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の 6 問から 5 問を選択して解答せよ。解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1. f と g は $\mathbb{R}$ で定義された周期 2π の周期関数であり、$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ $(0\le x<2\pi)$, $g(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ $(0\le x<2\pi)$ を満たすとする。このとき、以下の問に答えよ。
(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ (cos, sin を用いるもの)。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、Gibbs の現象を起こすのはどちらか、それぞれ理由をつけて答えよ。

問 2. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は周期 2π の周期関数で、連続かつ区分的に C^1 級とする。

$$g(x):=\begin{cases} f'(x) & (f\text{ が }x\text{ で微分可能であるとき})\\ 0 & (f\text{ が }x\text{ で微分可能でないなとき})\end{cases}$$

で $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を定めるとき、f の Fourier 係数と g の Fourier 係数の間に成り立つ関係を述べて証明せよ。

問 3. (1) $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$, 共役 Fourier 変換 $\mathscr{F}^*f$ の定義を記せ。
(2) 一般に $\mathscr{F}[\mathscr{F}f](\xi)=f(-\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R})$ が成り立つことの根拠を示せ。反転公式は既知として良い。
(3) $a>0$ に対して、関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & (|x|<a)\\ 0 & (|x|\ge a),\end{cases}\qquad g(x)=\operatorname{sinc}(ax)\quad \left(x\in\mathbb{R},\text{ ただし }\operatorname{sinc}x=\frac{\sin x}{x}\right)$$

で定めるとき、f と g の Fourier 変換 $\mathscr{F}f$, $\mathscr{F}g$ を求めよ。結果だけでなく根拠 (簡単な途中経過) を書くこと。

問 4. $N\in\mathbb{N}$ に対して $\omega:=e^{\frac{2\pi i}{N}}$ とおく。周期 N の周期数列 $f,g,h\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)g(k)$ $(n\in\mathbb{Z})$, $\mathscr{F}h(n)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}h(j)\omega^{-nj}$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく。
(1) $f*g$ と $\mathscr{F}h$ はともに周期 N の周期数列であることを示せ。(2) $h=f*g$ であるとき、$\mathscr{F}h(n)=N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ が成り立つことを示せ。

問 5. 連続関数 $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、2 つの条件

(1a) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\quad ((x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)),$$

(1b) $$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)\quad (x\in\mathbb{R})$$

を満たす u を求めたい (波動方程式の初期値問題)。

(1) $\hat{u}(\xi,t):=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、それを解け。ただし、$x\to\pm\infty$ のとき $\psi(x)$ は 急速に 0 に近づくとする (ψ の Fourier 変換が存在するための仮定)。

(2) (1) で求めた $\hat{u}$ を逆 Fourier 変換することによって、u を求めよ。(この問題の解の公式は有名であり、それによると $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy$ となる。検算のために用いると良い。)

問 6. (1) 単位インパルス、単位インパルス応答とは何か、説明せよ。(2) 連続信号 $X(t)=e^{it}$ $(t\in\mathbb{R})$ をサンプリング周波数 f_s でサンプリングして得られた離散信号を $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とするとき、以下の問に答えよ。

(a) x_n をなるべく簡単な式で表せ。

(b) LTI フィルター F の単位インパルス応答を h とする。$y:=F[x]$ とするとき、y_n を x_n と h で表わせ。

略解

出題パターンはかなり限定されていて (授業でも公言している)、特に問 3, 4 は「今年はどれが出題されるか」なんだけど、準備していない人が多かった印象。

問 1 解説

(1) f と g の $-10 \leq x \leq 10$ の範囲のグラフはそれぞれ次のようになる。

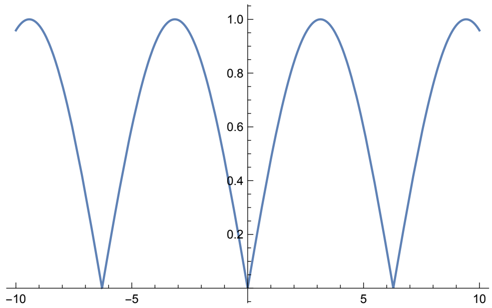

図 1: f のグラフ

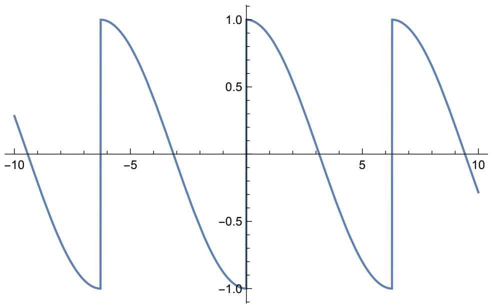

図 2: g のグラフ

(2) f は偶関数であるから cos のみ、g は奇関数であるから sin のみで展開される。

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \cos nx,$$

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(1-4n^2)\pi} \sin nx.$$

(3) f は連続かつ区分的に C^1 級であるから、f の Fourier 級数は一様収束する。また g は不連続かつ区分的に C^1 級であるから、g の Fourier 級数については Gibbs の現象が起こる。 ■

- (1) について: 偶関数・奇関数であるか、連続かどうか分かるように (1 周期を超えて) グラフを描きなさい、と授業で指導している。それが出来なかった人は以下正しく解けない。
- (2) f は偶関数、g は奇関数である。それを見落すと間違える。cos だから偶関数、sin だから奇関数と短絡的に考えないように。(これはレポート課題 1 でやっていて、授業で解説したのだけど…)
- (3) 「連続かつ区分的 C^1 級ならば一様収束」「不連続かつ区分的 C^1 級ならば Gibbs の現象が起こる」この 2 つは覚えて欲しい。後者は有名だけれど、前者とセットで覚えることで関数の連続性の影響が理解できる。なぜか「一様収束するので Gibbs の現象が起こる」と書いた人が複数いた (ちょっとひどい)。

問 2 解説　f が連続かつ区分的に C^1 級であるから、ある $\{x_j\}_{j=0}^{m}$ が存在して

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi,$$

各 $j \in \{1, \cdots, m\}$ について f は $[x_{j-1}, x_j]$ で C^1 級である。

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}b_n(g), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)'\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\left\{\left[f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n}a_n(g).
\end{aligned}
$$

ゆえに $a_n(f) = -\dfrac{b_n(g)}{n}$, $b_n(f) = \dfrac{a_n(g)}{n}$. ■

- 微分と Fourier 変換の関係は重要で、毎年何らかの形で出題する。普通の Fourier 変換の場合は「$\mathscr{F}[f'](\xi) = i\xi\mathscr{F}f(\xi)$ を示せ」とか。今回は周期関数の Fourier 変換 (Fourier 係数) がお題。証明の要点はどちらの場合も「部分積分する」。上の解答は $\cos nx$, $\sin nx$ を使う展開の場合を書いたが、複素指数関数 e^{inx} で書いても正解とする。

- f が C^1 級の場合は、積分区間を分割する必要がなくて、少し簡単になる。その場合の証明を書いた場合は部分点を与える。

問 3 解説

(1)

$$
\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx, \quad \mathscr{F}^*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.
$$

(2) 一般に $\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}^*f(-\xi)$ であるから

$$
\mathscr{F}\left[\mathscr{F}f\right](\xi) = \mathscr{F}^*\left[\mathscr{F}f\right](-\xi).
$$

反転公式 $\mathscr{F}^*\circ F = \mathrm{id}$ より

$$
\mathscr{F}^*\left[\mathscr{F}f\right](-\xi) = f(-\xi).
$$

ゆえに

$$
\mathscr{F}\left[\mathscr{F}f\right](\xi) = f(-\xi).
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}\cdot e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-a}^{x=a} \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ia\xi} - e^{-i(-a)\xi}}{-i\xi} = \frac{1}{a\xi\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}.
\end{aligned}
$$

ゆえに $\mathscr{F}f(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}g(\xi)$. よって

$$
f(-\xi) = \mathscr{F}\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}g(\xi).
$$

ゆえに (f が偶関数であることに注意して)

$$
\mathscr{F}g(\xi) = \sqrt{2\pi}f(-\xi) = \sqrt{2\pi}f(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a). \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{a} & (|\xi| < a) \\ 0 & (|\xi| > a). \end{cases}
$$

- (1) 共役 Fourier 変換が書けない、書いても反転公式が成り立たないものを書いている人 (例えば $\mathscr{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$, $\mathscr{F}^*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ とか。それぞれ単独ではあり得るけれど、反転公式 $\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f$ が成り立たないので満点がつけられない) が少なくない。

- (2) 「$\mathscr{F}f = g$ であれば、$\mathscr{F}g(\xi) = f(-\xi)$ である」というのは覚えるべきこと。(3) で使う (例えば複素関数論で計算したり、使わないで済ませることも出来なくはないけれど)。この内容は、上で述べた 3 セットのうち、2 セットで現れる。なぜそうなるか説明できないといけない。

- (3) 「覚えるべき Fourier 変換」(見出しにもしている) として授業で 5 つの関数 (3 セットと数えることもできる) あげてある。試験では公式の導出を書けるようにしておこう、と言ってある (授業に出ていなくても過去問を見れば分かると思うのだが…)。毎年 3 セットのどれかを出題している。今回は $[-a,a]$ の定義関数 (面積が 1 になるように $2a$ で割ってある) と $\mathrm{sinc}(ax)$ のペア。

  問題を見た瞬間に「意地悪な引っかけ問題でもない限り、$\mathscr{F}f=$ 定数 g, $\mathscr{F}g=$ 定数 f となるはず」と思うべきである。自分で計算してそうならなかったら、計算ミスをしている。

- $\mathscr{F}f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx$ のように書いた人がいるけれど、左辺は ξ を省略せず $\mathscr{F}f(\xi)$ と書くべきである。x で積分するので x は消えるけれど ξ だけは残る、ということを正しく理解しているか問題で、省略すべきではない。特に定義を書きなさい、という問の答えとしてはマズイ (レッドカード出したいくらい)。

- 偶関数、奇関数を使って式変形したつもりの人がいるけれど、$e^{-i\xi x}$ は偶関数でも奇関数でもない。気をつけて。

問 4 解説

(1) f が周期 N ということは、任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対して $f(j+N)=f(j)$ が成り立つということである。ゆえに任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$f*g(n+N)=\sum_{k=0}^{N-1}f((n+N)-k)g(k)=\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)g(k)=f*g(n).$$

$\omega=e^{2\pi i/N}$ は $\omega^N=1$ と満たすので、任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対して $\omega^{kN}=\left(\omega^N\right)^k=1^k=1.$ ゆえに任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\mathscr{F}h(n+N)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}h(j)\omega^{-(n+N)j}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}h(j)\omega^{-nj}=\mathscr{F}h(n).$$

(2) $h:=f*g$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](n)&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}h(j)\omega^{-nj}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1}f(j-k)g(k)\omega^{-nj}\right)\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1}f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k).\end{aligned}$$

右辺の (　) 内の $\sum$ を変数 (添字) 変換する。$\ell=j-k$ とおくと、$j=0$ のとき $\ell=-k$, $j=N-1$ のとき $\ell=N-1-k$, $j=\ell+k$, $\omega^{-nj}=\omega^{-in(\ell+k)}=\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから、

$$\sum_{j=0}^{N-1}f(j-k)\omega^{-nj}=\sum_{\ell=-k}^{N-1-k}f(\ell)\omega^{-n\ell}\omega^{-nk}=\omega^{-nk}\sum_{\ell=-k}^{N-1-k}f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

数列 $\ell\mapsto f(\ell)e^{-n\ell}$ は周期 N の周期数列であるから、$\ell=-k,-k+1,\cdots,N-1-k$ に対する和は $\ell=0,1,\cdots,N-1$ に対する和に等しい。

$$\sum_{\ell=-k}^{N-1-k}f(\ell)\omega^{-n\ell}=\sum_{\ell=0}^{N-1}f(\ell)\omega^{-n\ell}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f*g](n)&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\omega^{-nk}\sum_{\ell=-k}^{N-1-k}f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)g(k)=\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1}g(k)\omega^{-nk}\\&=N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare\end{aligned}$$

- (1) の後半、別証明を書いた人がいてちょっと感心 (もちろん授業で紹介した証明でなくても正しければ満点)。
- (2) 授業で言っているようにほぼ毎年出題している。Fourier ファミリーは 4 人家族なので、4 パターンのうちどれを出すか。要点は 4 つのどれも同じで「定義式を使って、積分または $\sum$ の順番を変えて、変数変換して…」。

問 5 解説

(1)

$$\frac{d^2}{dt^2}\widehat{u}(\xi,t)=-\xi^2\widehat{u}(\xi,t),\quad \widehat{u}(\xi,0)=0,\quad \frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{\psi}(\xi).$$

(一見難しそうだが) 任意に $\xi(\neq 0)$ を定めて考えると、これは単振動の方程式であり、一般解は

$$\widehat{u}(\xi,t)=A\cos(\xi t)+B\sin(\xi t)\quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).$$

初期条件に代入して

$$A=0,\quad \xi B=\widehat{\psi}(\xi).$$

これから $A=0$, $B=\dfrac{\widehat{\psi}(\xi)}{\xi}$. ゆえに

$$\widehat{u}(\xi,t)=\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\widehat{\psi}(\xi)=t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

なお、$\xi=0$ の場合は

$$\widehat{u}(0,t)=A+Bt\quad (A,\ B\ \text{は任意定数}).$$

から $A=0$, $B=\widehat{\psi}(0)$ であるから

$$\widehat{u}(0,t)=t\widehat{\psi}(0)=\left. t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi)\right|_{\xi=0}.$$

ゆえにすべての ξ に対して

$$(\star)\qquad \widehat{u}(\xi,t)=t\,\mathrm{sinc}(t\xi)\widehat{\psi}(\xi).$$

(2) ここで

$$G(x,t):=\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^*\left[\mathrm{sinc}(t\xi)\right](x)$$

とおくと

$$G(x,t)=\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}\times\begin{cases}\dfrac{1}{2t} & (|x|<t)\\ 0 & (|x|>t)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (|x|<t)\\ 0 & (|x|>t).\end{cases}$$

また

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi)=t\,\mathrm{sinc}(t\xi).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\widehat{u}(\xi,t)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi)\widehat{\psi}(\xi)=\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)*\psi\right](\xi).$$

Fourier 逆変換すると ($|x-y|<t \Leftrightarrow y\in[x-t,x+t]$ に注意して)

$$u(x,t)=G(\cdot,t)*\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)\psi(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\,dy.\blacksquare$$

- 授業では熱方程式の場合の説明をした。それを復習してあれば (1) は簡単のはず。
- (2) では、問 3(3) の結果 (もっとも結果自身は覚えるように言ってある) を使っている。

問 6 解説

(1)

$$\delta_n = \delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

で定まる数列 $\delta = \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ のことを単位インパルスという。

デジタルフィルター $F\colon \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ に、単位インパルス δ を入力したときの出力 $h := F[\delta]$ のことを、F の単位インパルス応答と呼ぶ。

(2) (a) サンプル周期 T_s は $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ で求まる。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x_n = X(nT_s) = X\left(n/f_s\right) = e^{in/f_s} = e^{in\omega} = \left(e^{i\omega}\right)^n.$$

ただし $\omega := \dfrac{1}{f_s}$ とおいた。

(b) $y = F[x] = x * h$ であるから

$$y_n = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(n-k)\omega}h(k) = e^{in\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega}h(k) = x_n\widehat{h}(\omega).$$

ここで $\widehat{h}$ は h の離散時間フーリエ変換である。■

- デジタル・フィルターは授業 1 回半くらいの短い話に大事なことが詰まっている。今回は基本的な知識を尋ねてみた。
- (1) 単位インパルス δ、単位インパルス応答は基礎事項である。覚えること自体は簡単のはず。
- (2) サンプリングは $x_n = X(nT_s)$ で x_n を定めること、というのも基本。正弦波をサンプリングすると等比数列になる、というのも基本 (次の周波数特性の話に繋がる)。
- (3) LTI フィルターの周波数特性というのも基本で、そこに単位インパルス応答の離散時間フーリエ変換が現れることが出題の理由。